

Таблица коэффициентов.

Таблица коэффициентов, используемых в задачах по вычислительной математике.

N	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	1	3	1	2	1
2	2	1	3	2	3
3	3	2	3	1	2
4	2	1	0	1	2
5	1	2	2	0	3
6	2	0	1	1	3
7	1	0	2	3	2
8	2	1	3	1	1
9	1	3	2	2	3
10	2	1	3	0	2
11	1	3	0	1	2
12	2	0	2	3	1
13	1	2	0	2	3
14	2	1	1	3	1
15	1	3	2	0	3
16	2	0	3	1	1
17	1	2	2	3	3
18	2	3	2	0	1
19	1	2	3	0	3
20	2	0	2	3	1
21	1	2	3	2	2
22	2	1	3	2	2
23	1	3	1	2	2
24	2	1	3	0	2
25	1	2	0	2	1
26	2	1	2	0	3
27	1	1	2	3	1
28	2	3	2	0	1
29	1	2	1	0	3
30	2	1	0	2	3

$$P_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_5(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

N – номер варианта, M – номер группы (определяется преподавателем)

$$\xi = 0.12$$

Интерполяция.

Используя интерполяционный многочлен Лагранжа, приблизить функцию, заданную таблично. Вычислить приближённое значение функции в точке $x=x_0+M*0.1+\xi$ (вычисления вести с четырьмя знаками после запятой).

№	x_0	Таблица				
1	-1.25	x	-2	-1	0	1
		y	4	1	-2	-3
2	-0.25	x	-1	0	1	2
		y	1	-2	-3	-1
3	0.75	x	0	1	2	3
		y	-2	-3	-1	0
4	1.75	x	1	2	3	4
		y	-3	-1	0	7
5	2.75	x	2	3	4	5
		y	-1	0	7	4
6	3.75	x	3	4	5	6
		y	0	7	4	1
7	1.75	x	2	3	4	5
		y	4	1	-2	-3
8	-3.25	x	-4	-3	-2	-1
		y	1	-2	-3	-1
9	3.75	x	3	4	5	6
		y	-2	-3	-1	0
10	4.75	x	4	5	6	7
		y	-3	-1	0	7

№	x_0	Таблица				
11	5.75	x	5	6	7	8
		y	-1	0	7	4
12	6.75	x	6	7	8	9
		y	0	7	4	1
13	-4.25	x	-5	-4	-3	-2
		y	-2	-3	-1	0
14	3.75	x	3	4	5	6
		y	4	1	-2	-3
15	2.75	x	2	3	4	5
		y	1	-2	-3	-1
16	-2.25	x	-3	-2	-1	0
		y	-2	-3	-1	0
17	-1.25	x	-2	-1	0	1
		y	-3	-1	0	7
18	-0.25	x	-1	0	1	2
		y	-1	0	7	4
19	0.75	x	0	1	2	3
		y	0	7	4	1
20	-3.25	x	-4	-3	-2	-1
		y	-3	-1	0	7

№	x_0	Таблица				
21	-4.25	x	-5	-4	-3	-2
		y	4	1	-2	-3
22	4.75	x	4	5	6	7
		y	4	1	-2	-3
23	5.75	x	5	6	7	8
		y	-2	-3	-1	0
24	6.75	x	6	7	8	9
		y	-3	-1	0	7
25	-2.25	x	-3	-2	-1	0
		y	-1	0	7	4
26	-1.25	x	-2	-1	0	1
		y	0	7	4	1
27	0.75	x	0	1	2	3
		y	0	1	2	3
28	1.75	x	1	2	3	4
		y	1	-2	-3	-1
29	4.75	x	4	5	6	7
		y	-1	0	7	4
30	5.75	x	5	6	7	8
		y	0	7	4	1

Функция задана таблицей

Метод наименьших квадратов.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

где $x_i = i - M*0.5 - N*0.2 + 10*\xi$, значения y_i определяются из таблицы:

N	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	3.1	1.7	0.9	0.7	1.05
2	-0.4	0.2	1.0	1.2	0.9
3	6.4	3.3	1.4	1.3	2.5
4	7.5	4.5	3.0	1.8	2.5
5	5.7	2.9	1.2	0.8	1.8
6	-1.3	1.2	2.8	3.0	2.5
7	-0.8	-1.6	-1.3	0.4	3.2
8	0.8	1.6	1.2	-0.4	-5.7
9	0.9	0.6	1.2	1.6	3.1
10	0.9	1.4	1.1	0.4	-1.2

N	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
11	-4.8	0.0	3.2	4.0	2.8
12	11	6.5	3.2	1.8	3.5
13	1.3	0.7	0.9	1.5	3.5
14	0.8	1.1	1.6	2.9	4.5
15	2.8	1.4	2.1	3.6	4.8
16	5.2	2.4	1.2	0.8	1.5
17	4.8	2.6	1.8	1.3	1.0
18	1.4	3.2	2.8	1.6	0.2
19	-1.2	0.8	2.3	2.8	0.7
20	-2	0.6	2.2	2.5	0.9

N	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
21	-1.0	1.6	2.5	1.2	-2.0
22	1.8	2.5	1.6	0.3	-2.0
23	2.6	0.4	-1.2	-1.6	-1.0
24	-2.0	0.2	1.4	2.2	1.8
25	-1.0	-1.6	-1.3	-0.5	1.5
26	0.0	-1.4	-1.6	-0.5	1.2
27	3.2	2.8	2.2	0.6	-2.0
28	2.4	1.0	0.1	-0.2	0.4
29	1.8	0.9	0.3	0.12	0.0
30	1.6	0.9	0.4	0.28	0.2

Применяя метод наименьших квадратов, приблизить её многочленами 1^й и 2^й степени. Для каждого приближения определить величину среднеквадратичной погрешности, построить график.

Задача Коши

Численно решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$dy(x)/dx=f(x,y(x)), y(a)=c+M*0.01-\xi*0.2$$

на отрезке $[a,b]$ с шагом $h=0.2, h=0.4$:

а) методом Эйлера;

б) методом Эйлера-Коши или исправленным методом Эйлера [на усмотрение преподавателя];

в) методом Рунге-Кутты четвёртого порядка.

Оценить погрешности и уточнить решения по правилу Рунге.

Построить графики полученных решений.

N	$f(x,y)$	a	b	c
1	$y+x+1$	0.1	0.9	-1.31
2	$y-x+2$	0.2	1	-1.69
3	$-y+x+3$	0.3	1.1	3.47
4	$-y-x+4$	0.4	1.2	3.31
5	$y+2x-5$	0.5	1.3	3.61
6	$-y-2x+6$	0.6	1.4	4.31
7	$-y+2x-7$	0.7	1.5	-5.19
8	$-y-2x+8$	0.8	1.6	5.88
9	$2y+x-9$	0.9	1.7	3.94
10	$2y-x-10$	1	1.8	5.53
11	$-2y+x+11$	1.1	1.9	6.13
12	$-2y-x+12$	1.2	2	5.21
13	$2y+2x-13$	1.3	2.1	5.01
14	$2y-2x-14$	1.4	2.2	8.51
15	$-2y+2x+15$	1.5	2.3	9.21

N	$f(x,y)$	a	b	c
16	$-2y-2x+16$	1.6	2.4	6.11
17	$y+3x-17$	1.7	2.5	11.41
18	$y-3x+18$	1.8	2.6	-12.09
19	$-y+3x-19$	1.9	2.7	-12.79
20	$-y-3x+20$	2	2.8	13.31
21	$3y+x-21$	2.1	2.9	6.22
22	$3y-x-22$	2.2	3	8.07
23	$-3y+x+23$	2.3	3.1	8.51
24	$-3y-2x+24$	2.4	3.2	6.08
25	$2y+3x+25$	2.5	3.3	-16.49
26	$2y-3x+26$	2.6	3.4	-8.91
27	$-2y+3x-27$	2.7	3.5	-9.06
28	$-2y-3x+28$	2.8	3.6	9.36
29	$3y+2x-29$	2.9	3.7	7.61
30	$3y-2x+30$	3	3.8	-7.96

Погрешности вычислений – 1

Вычислить по схеме Горнера значение многочлена $P_5(x)$ для
 $x = M + N/10 + \xi$

Оценить абсолютную и относительную погрешности результата.

Записать результат с учётом погрешности.

Коэффициенты многочлена заданы точно, ξ – с округлением.

Нелинейные уравнения

1) Отделить корень нелинейного уравнения

$$P_5(x) = N - M \cdot x + \xi$$

2) Найти решение уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-1}$ методом половинного деления (бисекции);

3) Выбрав полученное решение в качестве начального приближения, найти решение уравнения методом касательных (Ньютона-Рафсона) с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Одномерная оптимизация

1) Выбрать интервал неопределённости для поиска локального минимума функции

$$F(x) = P_4(x) + M \cdot x^3 + (N - \xi) \cdot x$$

(точка минимума должна находиться внутри интервала).

2) Найти минимум функции методом Ньютона-Рафсона с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.
Выписать значение функции в точке минимума.

Численное интегрирование.

Вычислить интеграл от многочлена $P_5(x)$ в пределах от $A = 1.9 - N \cdot 0.1 - M \cdot 0.2$ до $B = 3.1 - N \cdot 0.1 - M \cdot 0.2$ (N – номер варианта, M – номер группы) с шагом $h = 0.2$, используя формулы

- а) трапеций или центральных прямоугольников [на усмотрение преподавателя];
- б) Симпсона.

Оценить погрешности результатов. Проверить справедливость оценок, сравнив полученные приближённые значения интеграла с точным значением, вычисленным по формуле Ньютона-Лейбница.

Значения многочлена вычислять по схеме Горнера. Промежуточные вычисления вести с шестью значащими цифрами. Ответы записать с учётом погрешности

Погрешности вычислений – 2

Вычислить значение Z и оценить абсолютную и относительную погрешности результата, считая, что значения исходных данных получены в результате округления. Целые числа считать точными. Одинаковые числа считать результатом округления одной и той же величины. Записать результат с учётом погрешности.

№	Z	№	Z
1	$\sin(\sqrt{1.01} + \sqrt[3]{2.02} - \sqrt[4]{3 \cdot 1.01})$	16	$\ln(3.3) \cdot \sin(5.13 + 3.61)$
2	$e^{3.14} \cos(2.12 \cdot 7.97)$	17	$(1 - e^{0.01}) \cdot 3.16$
3	$3.14^{2.73} - 2.73^{3.14}$	18	$\sqrt[3]{e^{1.03}} - e^{1.01} \cdot 3.14159$
4	$\sqrt{(1.01)^2 - (2 \cdot 1.01)^3 + (3.03)^4}$	19	$\sqrt{-(18.1)^2 + (1.3)^2 + (40.5)^3}$
5	$\ln(5.55)(\cos(1.111) + \sin(2 \cdot 1.111))$	20	$\sin(8 \cdot 1.0 \cdot 3.14) + \cos(1.0)$
6	$(e^{1.913} + e^{-1.913})\sqrt{1.312 + 2.199}$	21	$\sin^3(2.0 \cdot 5.0) \cdot \cos(3 \cdot 2.0)$
7	$-10.1 + \sqrt{(10.1)^2 - 4.3 \cdot 1.1}$	22	$\ln(\sin(1.5) + 0.01) - 1.0$
8	$1.32 \cos(0.22) - \sin(3.14)$	23	$(\sqrt{1.01} + \sqrt{2.02} - \sqrt{3 \cdot 1.01})^2$
9	$\sqrt{1.18 + \cos^2(1.3 \cdot 1.2)}$	24	$(\sqrt{1.1} - 1.04)^2 / \sin(3.15)$
10	$3.14 \sqrt{(8.73)^2 - (8.09)^2}$	25	$(\sin 3.1 + \cos(6 - 3.1)) \cdot e^{-0.01}$
11	$\sqrt{(1.3) \cdot (4.2) / 16.1}$	26	$\sin(\exp(2.15 + 2.51) - 100.0)$
12	$\sqrt{8.3(8.3 - 3.5)(3.5 - 1.7)}$	27	$(e^{1.1} - e^{-1.1}) / (e^{2.2} - e^{-2.2})$
13	$\sqrt[3]{10.82 - 9.37 / 0.28}$	28	$(2^{\sqrt{3.18}} + 3^{\sqrt{4.28}}) / 5.13$
14	$(1.87)^4 + (3.23)^4 - (2.93)^4$	29	$(3.01e^{2.18} - 2.18e^{3.01})$
15	$\exp(46.3 / 2 - 10.5 - 5 \cdot 2.48)$	30	$\sin(\sqrt{1.01} - \sqrt{2 \cdot 1.01} + \sqrt{3.03})$

(аргументы тригонометрических функций заданы в радианах)

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2.2 - 0.3 \cdot M & 1.5 & -14 \\ 7.25 + 0.25 \cdot N & 1.8 - 0.05 \cdot N & -0.1 \cdot M \\ 3.15 - 0.15 \cdot M & -20 + 0.15 \cdot N & -8.3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 41.1 - 1.3 \cdot N \\ -14.7 - M \\ -21.3 + 1.9 \cdot N \end{pmatrix}.$$

(N – номер варианта, M – номер группы) решить:

- 1) методом Гаусса с выбором главного элемента (с последующей проверкой и уточнением)
- 2) методом простых итераций или методом Зейделя [на усмотрение преподавателя].

Решения найти с точностью 10^{-3} .

В промежуточных вычислениях удерживать 4-5 знаков после запятой.

1. Погрешности вычислений.
2. Устойчивость. Корректность. Сходимость.
3. Метрика. Сжатие. Неподвижная точка.
4. Нелинейные уравнения. Метод бисекции.
5. Нелинейные уравнения. Метод простой итерации. — **исключён.**
6. Нелинейные уравнения. Метод Ньютона.
7. Нормы векторов и матриц.
8. Системы линейных уравнений. Число обусловленности.
9. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса с выбором главного элемента.
10. Системы линейных уравнений. Метод простой итерации.
11. Системы линейных уравнений. Метод Зейделя.
12. Системы нелинейных уравнений. Метод Ньютона. — **исключён.**
13. Задача одномерной оптимизации. Метод золотого сечения. — **исключён.**
14. Задача одномерной оптимизации. Метод бисекции. — **исключён.**
15. Задача одномерной оптимизации. Метод Ньютона.
16. Задача многомерной оптимизации. Метод Ньютона. — **исключён.**
17. Интерполяция. Полиномиальная интерполяция. Линейная интерполяция. Сплайны.
18. Интерполяция. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.
19. Аппроксимация. Метод наименьших квадратов.
20. Аппроксимация. Подбор коэффициентов в формуле вида $y = Ae^{Bx}$.
21. Аппроксимация. Подбор коэффициентов в формуле вида $y = Ax^B$.
22. Аппроксимация. Подбор коэффициентов в формуле вида $y = A/(x-B)$.
23. Численное интегрирование. Квадратурные формулы. Алгебраическая степень точности.
24. Численное интегрирование. Методы левых и правых прямоугольников.
25. Численное интегрирование. Метод центральных прямоугольников.
26. Численное интегрирование. Метод трапеций.
27. Численное интегрирование. Метод Симпсона.
28. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Метод Эйлера.
29. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Исправленный метод Эйлера.
30. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Метод Эйлера-Коши.
31. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка.