Красняков А.
ВВ-2-06

Статика, С-1

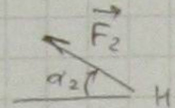
Вар 5; рис 5, задание 2.

$M = 60$ Н

$l = 0{,}5$ м

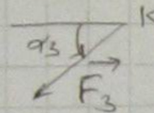
$F_2 = 20$ Н

$\alpha_2 = 45^\circ$

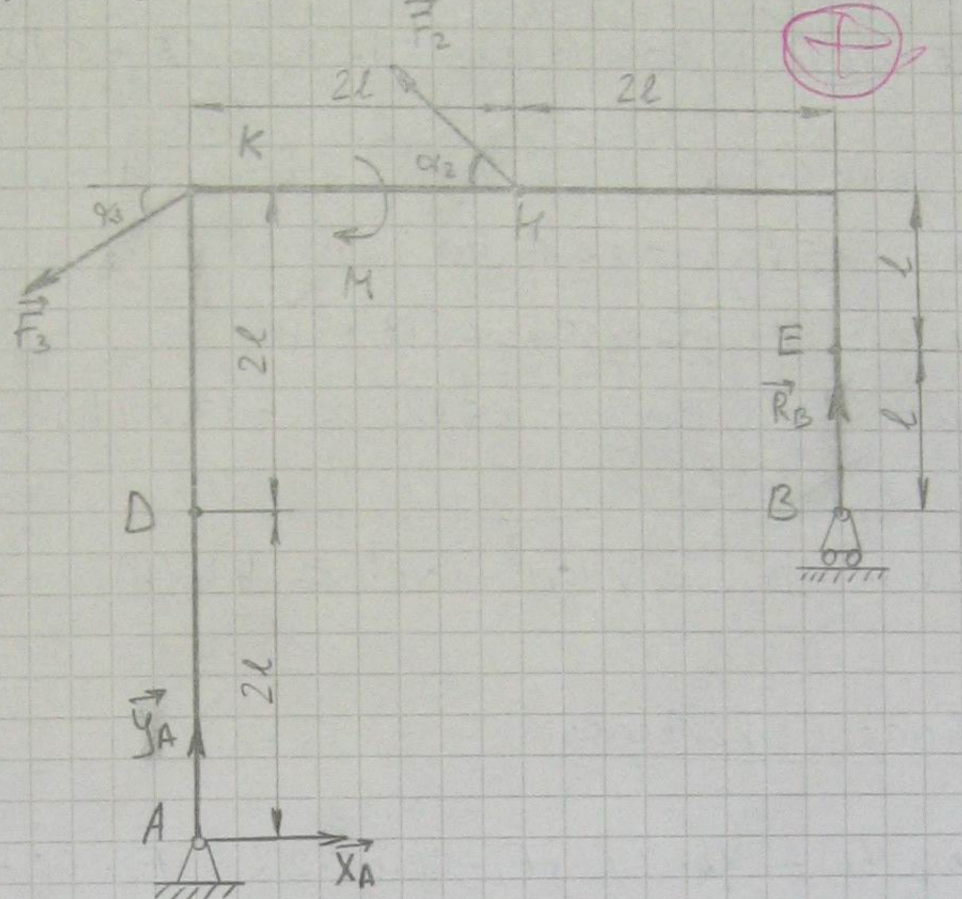


$F_3 = 30$ Н

$\alpha_3 = 30^\circ$



Реакции A, B - ?



Составим три уравнения равновесия

$$\Sigma F_{kx} = 0 : \quad X_A - F_3 \cdot \cos\alpha_3 - F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 0$$

$$\Sigma F_{ky} = 0 : \quad y_A - F_3 \cdot \sin\alpha_3 + F_2 \cdot \sin\alpha_2 + R_B = 0$$

$$\Sigma m_A(F_k) = 0 : \quad -M + F_3 \cdot \cos\alpha_3 \cdot 4l + F_2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot 4l + F_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 2l + R_B \cdot 4l = 0$$

$$R_B = \frac{M - F_3 \cdot \cos\alpha_3 \cdot 4l - F_2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot 4l - F_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 2l}{4l} =$$

$$= \frac{60 - 30 \cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2} - 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 - 20\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{2} = 30 - 15\sqrt{3} - 15\sqrt{2} \simeq -17{,}2 \text{ (Н)}$$

$$X_A = F_3 \cos\alpha_3 + F_2 \cdot \cos\alpha_2$$

$$X_A = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{3} + 10\sqrt{2} \simeq 40{,}1 \text{ (Н)}$$

$$y_A = F_3 \sin\alpha_3 - F_2 \sin\alpha_2 - R_B$$

$$y_A = 30 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(30 - 15\sqrt{3} - 15\sqrt{2}\right) =$$

$$= 15 - 10\sqrt{2} - 30 + 15\sqrt{3} + 15\sqrt{2} = -15 + 5\sqrt{2} + 15\sqrt{3} \simeq 18{,}1\ (Н)$$

В итоге:

$$X_A = 15\sqrt{3} + 10\sqrt{2} \simeq 40{,}1\ (Н)$$

$$y_A = -15 + 5\sqrt{2} + 15\sqrt{3} \simeq 18{,}1\ (Н)$$

$$R_B = 30 - 15\sqrt{3} - 15\sqrt{2} \simeq -17{,}2\ (Н)$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + y_A^2} = \sqrt{40{,}1^2 + 18{,}1^2} \simeq 44\ (Н)$$

Сделаем проверку

$$\sum m_D(F_k) = X_A \cdot 2l + F_3 \cdot \cos\alpha_3 \cdot 2l + F_2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot 2l +$$

$$+ F_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 2l + R_B \cdot 4l - M =$$

$$= (15\sqrt{3} + 10\sqrt{2}) \cdot 1 + 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 +$$

$$+ 2 \cdot (30 - 15\sqrt{3} - 15\sqrt{2}) - 60 =$$

$$= \cancel{15\sqrt{3}} + \cancel{10\sqrt{2}} + \cancel{15\sqrt{3}} + \cancel{10\sqrt{2}} + \cancel{10\sqrt{2}} + \cancel{60} - \cancel{30\sqrt{3}} - \cancel{30\sqrt{2}} - \cancel{60} = 0$$

Равенство выполняется

Ответ: $X_A = 40{,}1$ Н

$y_A = 18{,}1$ Н

$R_A = 44$ Н

$R_B = -17{,}2$ Н

(знак „−" у R_B означает, что направление силы противоположно изображённому на рисунке).

Красняков А.М.
ВВ-2-06

К1. Вар 5

Дано

$x = 2t + 2$ м

$y = 4 + 2t^2$ м

$t = 1$ с

---

v, a, a_τ, a_n, ρ - ?

1) Скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \ \frac{м}{с}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 4t \Big|_{t=1с} = 4 \ \frac{м}{с}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \ \frac{м}{с}$$

2) Ускорения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 4 \ \frac{м}{с^2} \quad ; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0 + 4^2} = 4 \ \frac{м}{с^2}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad \frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(v_x^2) + \frac{d}{dt}(v_y^2); \quad 2v \cdot \frac{dv}{dt} = 2v_x \cdot \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_\tau = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v} = \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 4}{2\sqrt{5}} = \frac{16}{2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}\sqrt{5} \ \frac{м}{с^2}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{4^2 - \frac{64}{5}} = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{4}{\sqrt{5}} \ \frac{м}{с^2}$$

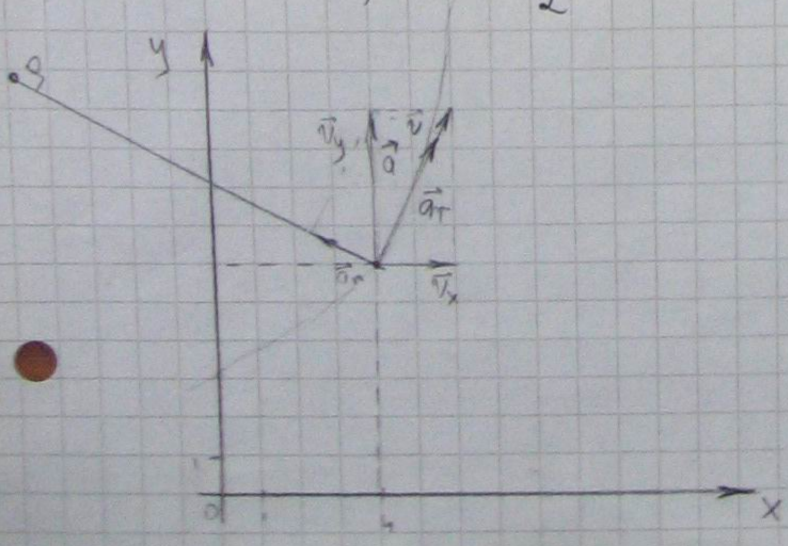
3) Радиус кривизны

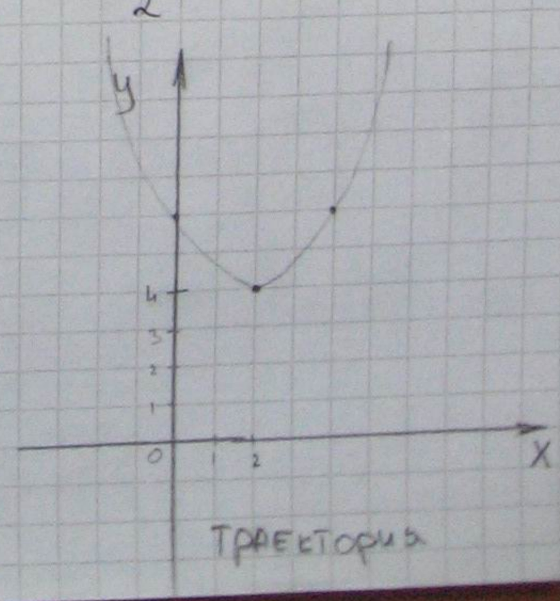
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4 \cdot 5}{\frac{4}{\sqrt{5}}} = 5\sqrt{5} \ (м)$$

4) Траектория движения

$$x = 2t + 2, \quad t^2 = \frac{(x-2)^2}{4}, \qquad \frac{(x-2)^2}{4} = \frac{y-4}{2}, \quad y = \frac{(x-2)^2}{2} + 4$$

$$y = 4 + 2t^2, \quad t^2 = \frac{y-4}{2},$$





ДИ. Вар 5 Кинематика

ВВ-2-06

Дано:

$R_4 = 0{,}3$ м

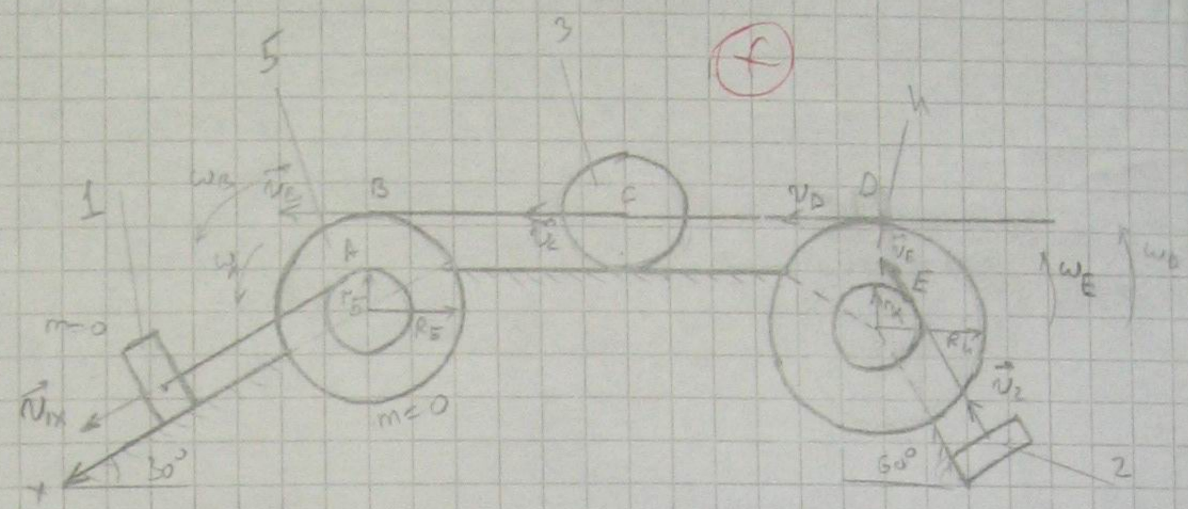
$r_4 = 0{,}1$ м

$R_5 = 0{,}2$ м

$r_5 = 0{,}1$ м

$v_1 = v_{1x} = 2\ \frac{м}{с}$

$t_1 = 1$ с



Скорости

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t+2) = 2\ \frac{м}{с}, \quad a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 0$$

$$v_1 = v_A = 2\ \frac{м}{с}; \ \omega_A = \frac{v_A}{r_5} = \frac{2}{0{,}1} = 20\ \frac{рад}{с}; \quad \omega_A = \omega_B = 20\ \frac{рад}{с}; \ v_B = \omega_B \cdot R_5 = 20 \cdot 0{,}2 = 4\ \frac{м}{с}$$

$$v_B = v_C = v_D = 4\ \frac{м}{с}; \quad \omega_D = \frac{v_D}{R_4} = \frac{4}{0{,}3} = 13{,}3\ \frac{рад}{с}; \quad \omega_D = \omega_E = 13{,}3\ \frac{рад}{с}$$

$$v_E = \omega_E \cdot r_4 = 13{,}3 \cdot 0{,}1 = 1{,}33; \quad v_2 = v_E = 1{,}33\ \frac{м}{с}$$

Ускорения

$$a_A^\tau = a_1 = 0, \quad a_A^n = \omega_A^2 \cdot r_5 = \frac{v_A^2}{r_5} = \frac{4}{0{,}1} = 40\ \frac{м}{с^2}; \quad a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = 40\ \frac{м}{с^2}$$

$$\varepsilon_A = \frac{a_A^\tau}{r_5} = 0 = \varepsilon_B; \quad a_B^n = \omega_B^2 \cdot R_5 = \frac{v_B^2}{R_5} = \frac{16}{0{,}2} = 80\ \frac{м}{с^2}; \quad a_B = 80\ \frac{м}{с^2}$$

$$a_B^\tau = \varepsilon_B \cdot R_5 = 0 = a_D^\tau; \quad a_D^n = \omega_D^2 \cdot R_4 = \frac{v_D^2}{R_4} = \frac{4^2}{0{,}3} = 53{,}3\ \frac{м}{с^2}; \quad a_D = 53{,}3\ \frac{м}{с^2}$$

$$\varepsilon_D = \frac{a_D^\tau}{R_4} = 0 = \varepsilon_E, \quad a_E^n = \omega_E^2 \cdot r_4 = \frac{v_E^2}{r_4} = \frac{1{,}33^2}{0{,}1} = 17{,}7\ \frac{м}{с^2}; \quad a_E = 17{,}7\ \frac{м}{с^2}$$

$$a_E^\tau = \varepsilon_E \cdot r_4 = 0, \quad a_2 = a_E^\tau = 0$$

Дм. Вар 5 , рис 5 , задание 2 Красняков

ВВ-2-06

$R_4 = 0{,}3$ м

$r_4 = 0{,}1$ м

$R_5 = 0{,}2$ м

$r_5 = 0{,}1$ м

$f = 0{,}1$

$m_2 = 4$ кг
$m_3 = 6$ кг
$m_4 = 8$ кг

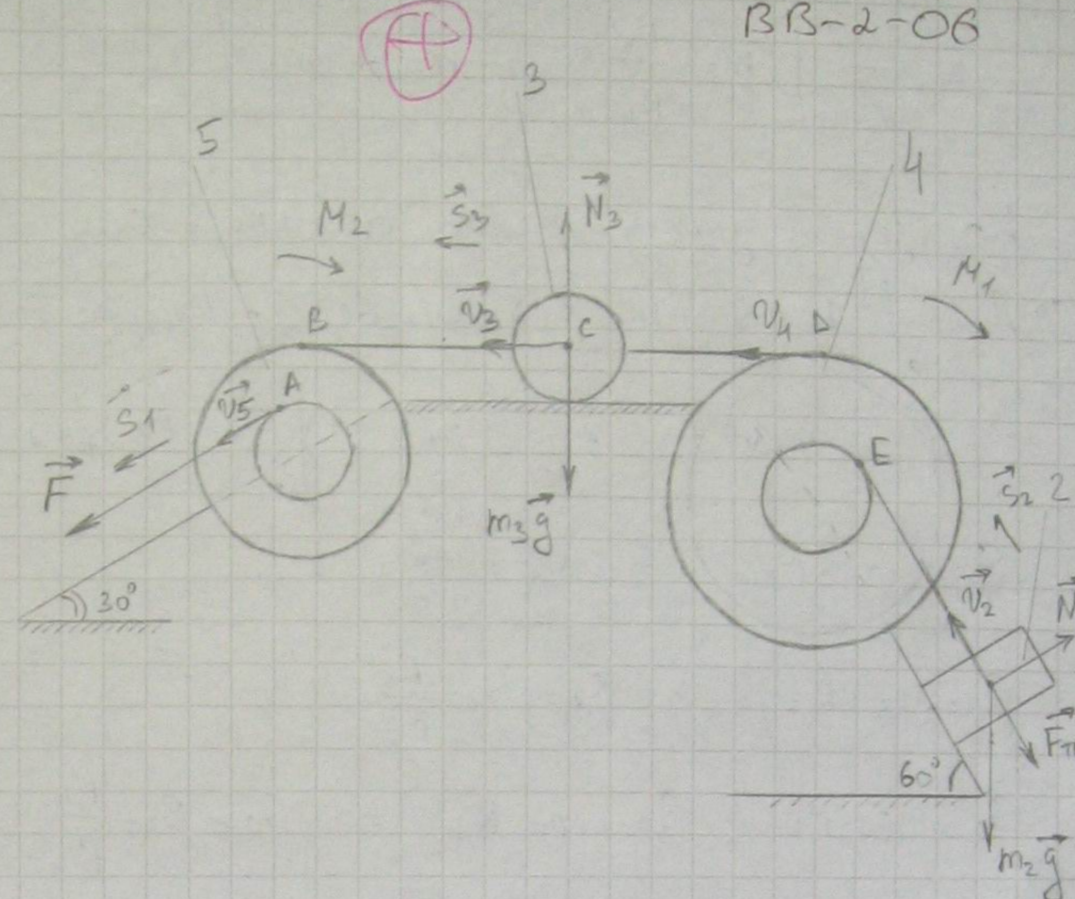
$M_1 = 0$ Н·м
$M_2 = 0{,}4$ Н·м

$F = f(s) = 80(3+4s)$ Н

$S_1 = 0{,}8$ м

Найти:

v_{C_3}



По теореме об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A$$

$T_0 = 0$, т.к. система покоилась

$$T = T_2 + T_3 + T_4 \qquad (T_5 = 0, \text{ т.к. } m_5 = 0)$$

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2}, \quad J_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}, \quad \omega_3 = \frac{v_3}{R_3}$$

$$T_3 = \frac{m_3 \cdot v_3^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_3 \cancel{R_3^2}}{2} \cdot \frac{v_3^2}{\cancel{R_3^2}} = \frac{3}{4} m_3 \cdot v_3^2$$

$$T_4 = \frac{J_4 \omega_4^2}{2}, \quad J_4 = m_4 \cdot R_4^2, \quad \omega_4 = \frac{v_4}{R_4}$$

$$T_4 = \frac{1}{2} \cdot m_4 \cancel{R_4^2} \cdot \frac{v_4^2}{\cancel{R_4^2}} = \frac{m_4 v_4^2}{2}$$

Выразим v_2, v_4 через v_3

$$v_4 = v_3$$

$$\omega_4 = \frac{v_4}{R_4} = \frac{v_2}{r_4} \Rightarrow v_2 = v_4 \cdot \frac{r_4}{R_4} = v_3 \cdot \frac{r_4}{R_4}$$

$$T=\frac{1}{2}m_2\cdot v_3^2\cdot\left(\frac{r_4}{R_4}\right)^2+\frac{3}{4}m_3\cdot v_3^2+\frac{1}{2}\cdot m_4\cdot v_3^2=$$

$$=\frac{v_3^2}{2}\left[m_2\cdot\frac{r_4^2}{R_4^2}+\frac{3}{2}m_3+m_4\right]$$

Найдем сумму работ внешних сил

$$\Sigma A=\int_0^{S_1}F\cdot dS+m_2\,g\cdot S_2\cdot\sin 60^\circ-F_{тр_2}\cdot S_2-M_2\cdot\varphi_5$$

$$\int_0^{S_1}(3+4S)\cdot 80\,dS=80\cdot(3S+2S^2)\Big|_{S_1}=80(3S_1+2S_1^2)$$

$$S_1=\varphi_5\cdot r_5\quad\Rightarrow\quad\varphi_5=\frac{S_1}{r_5};$$

$$S_3=\varphi_5\cdot R_5\quad\Rightarrow\quad S_3=S_1\cdot\frac{R_5}{r_5};$$

$$S_2=\varphi_4\cdot r_4,\quad S_3=\varphi_4\cdot R_4\quad\Rightarrow\quad S_2=S_3\cdot\frac{r_4}{R_4}\quad\Bigg\}\quad S_2=S_1\cdot\frac{R_5\cdot r_4}{r_5\cdot R_4}$$

$$F_{тр_2}=N_2\cdot f=f\cdot m_2\cdot g\cdot\cos 60^\circ$$

$$\Sigma A=80(3S_1+2S_1^2)+S_1\cdot\frac{R_5\cdot r_4}{r_5\cdot R_4}\left(m_2 g\sin 60^\circ-f\cdot m_2 g\cdot\cos 60^\circ\right)-M_2\cdot\frac{S_1}{r_5}=$$

$$=S_1\left[80(3+2S_1)+m_2 g\cdot\frac{R_5\cdot r_4}{r_5\cdot R_4}(\sin 60^\circ-f\cdot\cos 60^\circ)-\frac{M_2}{r_5}\right]$$

В итоге получаем

$$\frac{v_3^2}{2}=\frac{S_1\left[80(3+2S_1)+m_2\cdot g\cdot\frac{R_5\cdot r_4}{r_5\cdot R_4}(\sin 60^\circ-f\cos 60^\circ)-\frac{M_2}{r_5}\right]}{m_2\cdot\frac{r_4^2}{R_4^2}+\frac{3}{2}m_3+m_4}$$

$$\frac{v_3^2}{2}=\frac{0{,}8\cdot\left[80(3+2\cdot 0{,}8)+4\cdot 9{,}8\cdot\frac{0{,}2\cdot 0{,}1}{0{,}1\cdot 0{,}3}(\sin 60^\circ-0{,}1\cos 60^\circ)-\frac{0{,}4}{0{,}1}\right]}{4\cdot\frac{0{,}1^2}{0{,}3^2}+\frac{3}{2}\cdot 6+8}=17{,}7$$

$$v_3=\sqrt{2\cdot 17{,}7}\simeq 6\ \frac{м}{с}$$

Ответ: $v_{C_3}=6\ \frac{м}{с}$

А-2 Красняков ВВ-2-06

Вариант №5

рис. 2.2.

Дано

$l_1 = 0,4$ м

$l_2 = 1,2$ м

$l_3 = 1,4$ м

$l_4 = 0,8$ м

$AD = DE$

$V_B = 8 \frac{м}{с}$

Найти

V_A, V_D, V_E

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$

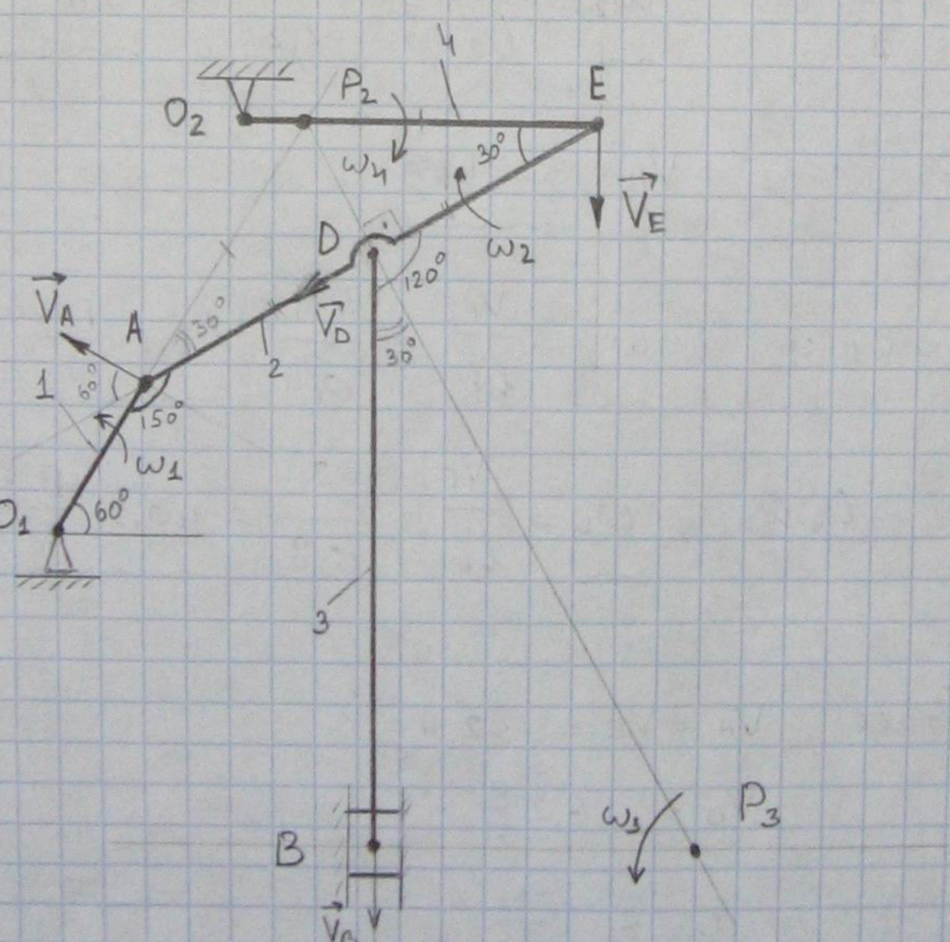
$\alpha = 60°$

$\beta = 150°$

$\gamma = 120°$

$\varphi = 90°$

$\theta = 30°$



$V_B = \omega_3 \cdot BP_3$

$tg\,30^\circ = \frac{BP_3}{BD} = \frac{BP_3}{l_3}$; $BP_3 = l_3 \cdot tg\,30^\circ = 1{,}4 \cdot tg\,30^\circ = 0{,}808$ м

$\omega_3 = \frac{V_B}{BP_3} = \frac{8}{0{,}808} = 10 \frac{рад}{с}$

$\cos 30^\circ = \frac{BD}{DP_3}$; $DP_3 = \frac{l_3}{\cos 30^\circ} = \frac{1{,}4}{\cos 30^\circ} = 1{,}62$ м

$V_D = DP_3 \cdot \omega_3 = 1{,}62 \cdot 10 = 16{,}2 \frac{м}{с}$

По теореме о проекциях скоростей точек отрезка на направления отрезка:

$V_D = V_A \cdot \cos 60^\circ$; $V_A = \frac{V_D}{\cos 60^\circ} = \frac{16{,}2}{\cos 60^\circ} = 32{,}4 \frac{м}{с}$

$V_A = DA \cdot \omega_2 = \frac{l_2}{2} \cdot \omega_2$; $\omega_2 = \frac{2 V_A}{l_2} = \frac{2 \cdot 32{,}4}{1{,}2} = 54 \frac{рад}{с}$

$V_E = DE \cdot \omega_2 = \frac{l_2}{2} \cdot \omega_2 = V_A = 32{,}4 \frac{м}{с}$

$V_A = O_1 A \cdot \omega_1 = l_1 \cdot \omega_1$; $\omega_1 = \frac{V_A}{l_1} = \frac{32{,}4}{0{,}4} = 81 \frac{рад}{с}$

$V_E = O_2 E \cdot \omega_4 = l_4 \cdot \omega_4$; $\omega_4 = \frac{V_E}{l_4} = \frac{32{,}4}{0{,}8} = 40{,}5 \frac{рад}{с}$

Ответ: $V_A = V_E = 32{,}4 \frac{м}{с}$

$V_D = 16{,}2 \frac{м}{с}$

$\omega_1 = 81 \frac{рад}{с}$

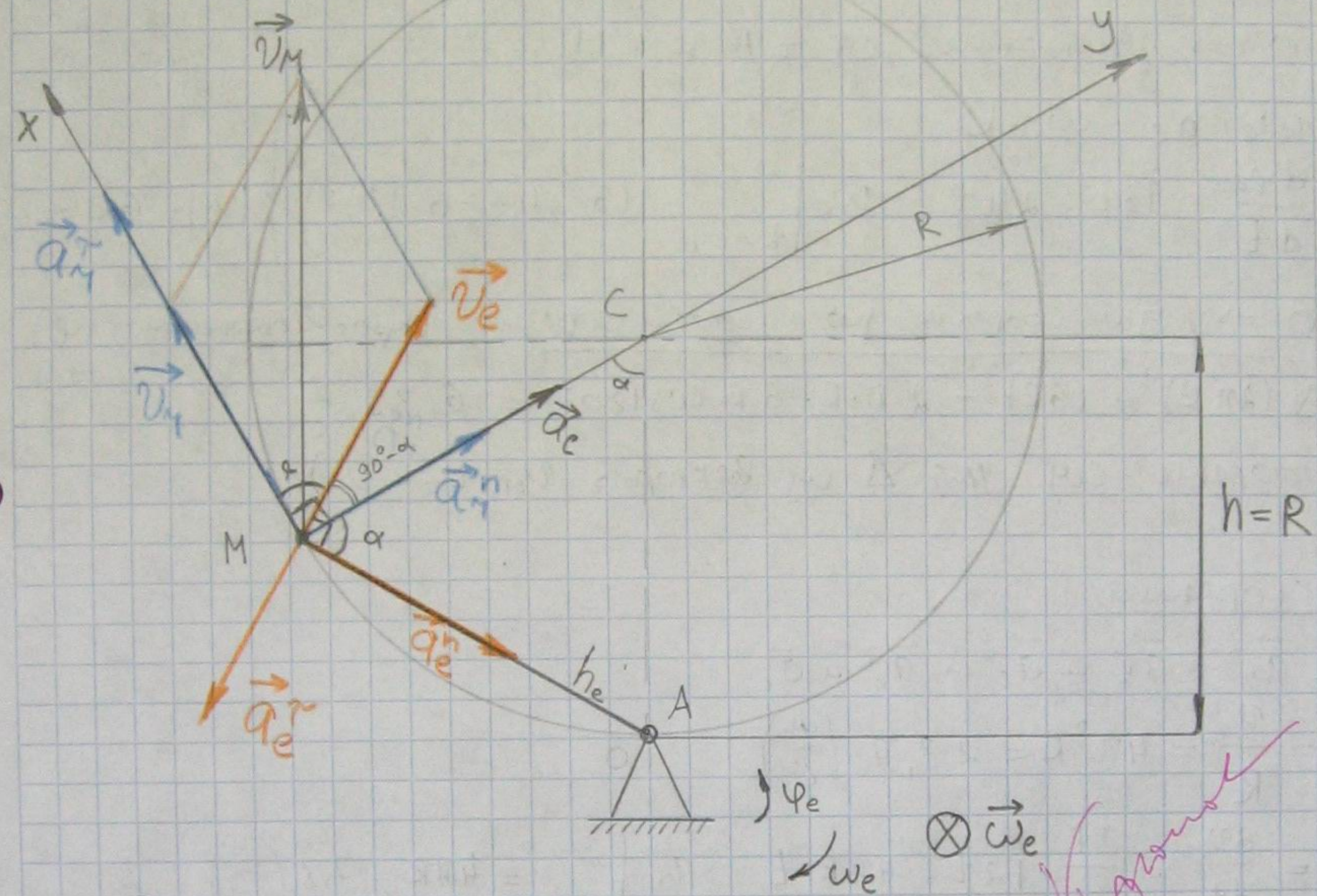
$\omega_2 = 54 \frac{рад}{с}$

$\omega_3 = 10 \frac{рад}{с}$

$\omega_4 = 40{,}5 \frac{рад}{с}$

Сложное движение точки. Красняков А.

Вариант 5. 5 рис, зад 2 ВВ-2-06.



Дано:

$\varphi_e = f_1(t) = 6t^3 - 12t^2$

$h = R = 0{,}6$ м, $t_1 = 1$с.

$S = \overset{\frown}{AM} = f_2(t) = \frac{\pi}{3} \cdot R \cdot (2t^3 - 1)$

Найти:

Скорости, ускорения

Решение

1. Местоположение т. М.

$$S_M \Big|_{t=t_1} = \frac{\pi}{3} \cdot R(2 \cdot 1 - 1) = \frac{\pi}{3} \cdot R = 0{,}2\pi \text{ (м)}$$

$$\alpha = \frac{S_M}{R} = \frac{\pi \cdot R}{3 \cdot R} = \frac{\pi}{3} \text{ (рад)}$$

h_e — радиус переносного движения ($\perp$ оси вращения)

Δ MCA — равносторонний ($MC = CA = R$, $\alpha = 60°$) $\Rightarrow$ $\underline{h_e = R}$

2. Скорости.

$\vec{v}_M = \vec{v}_ч + \vec{v}_e$

$v_ч = \dfrac{dS_ч}{dt} = \dfrac{\pi R}{3} \cdot 6t^2$; $\quad v_ч\Big|_{t=t_1} = \dfrac{\pi R}{3} \cdot 6 = 2\pi R = 1{,}2\pi \left(\frac{м}{с}\right) = 3{,}8 \left(\frac{м}{с}\right)$

$v_ч > 0 \Rightarrow$ движение от т. А к т. М.

$v_e = \omega_e \cdot h_e = \omega_e \cdot R$

$\omega_e = \dfrac{d\varphi_e}{dt} = 18t^2 - 24t$; $\quad \omega_e\Big|_{t=t_1} = 18 - 24 = -6 \left(\frac{рад}{с}\right)$ $\Bigg\}$ $|v_e| = 6R \left(\frac{м}{с}\right)$

$\omega_e < 0 \Rightarrow$ угл. скорость по часовой стрелке (противоположно φ)

$v_M = \sqrt{(2\pi R)^2 + (6R)^2 - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot 6 \cdot R \cdot \cos 120^\circ} = 6{,}38 \ \frac{м}{с}$

(по теореме cos для Δ из векторов $\vec{v}_M, \vec{v}_ч, \vec{v}_e$).

3. Ускорения.

$\vec{a} = \vec{a}_ч^{\,n} + \vec{a}_ч^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_c$

$a_ч^n = \dfrac{v_ч^2}{R} = 4\pi^2 R = 23{,}7 \left(\frac{м}{с^2}\right)$

$a_ч^\tau = \dfrac{dv_ч}{dt} = \dfrac{\pi R}{3} \cdot 12t = 4\pi R t$; $\quad a_ч^\tau\Big|_{t=t_1} = 4\pi R = 7{,}5 \left(\frac{м}{с^2}\right)$

$\vec{a}_ч^{\,\tau} \uparrow\uparrow \vec{v}_ч$, т.к. знаки одинаковые, > 0

$a_e^n = \omega_e^2 \cdot h_e = \omega_e^2 \cdot R = 21{,}6 \left(\frac{м}{с^2}\right)$

$\varepsilon_e = \dfrac{d\omega_e}{dt} = 36t - 24$; $\quad \varepsilon_e\Big|_{t=t_1} = 36 - 24 = 12 \left(\frac{рад}{с}\right)$

$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot h_e = \varepsilon_e \cdot R = 7{,}2 \left(\frac{м}{с^2}\right)$; $\vec{a}_e^{\,\tau} \uparrow\downarrow \vec{v}_e$, знаки разные.

$\vec{a}_c = 2 \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{v}_ч$; $\quad a_c = 2 \cdot |\omega_e| \cdot |v_ч| \cdot \sin 90^\circ = 6 \cdot 2\pi R = 22{,}6 \left(\frac{м}{с^2}\right)$

Направление $\vec{a}_c$ – поворот на 90° по ω_e, т.е. $\uparrow\uparrow \vec{a}_ч^{\,n}$

Складываем все векторы ускорений:

$a_x = a_ч^\tau - a_e^n \cdot \sin\alpha - a_e^\tau \cdot \cos\alpha = -14{,}8 \left(\frac{м}{с^2}\right)$

$a_y = a_ч^n + a_c + a_e^n \cdot \cos\alpha - a_e^\tau \cdot \sin\alpha = 50{,}9 \left(\frac{м}{с^2}\right)$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 53 \left(\frac{м}{с^2}\right)$

Принцип возможных перемещений

Красняков А.

ВВ-2-06

Вар. 5; задание 5, рисунок 2.

$\alpha = 0^\circ$
$\beta = 150^\circ$
$\gamma = 30^\circ$
$\varphi = 0^\circ$
$\theta = 60^\circ$

$C = 120 \frac{Н}{см}$

$M_1 = 220$ Н·м
$M_2 = 360$ Н·м

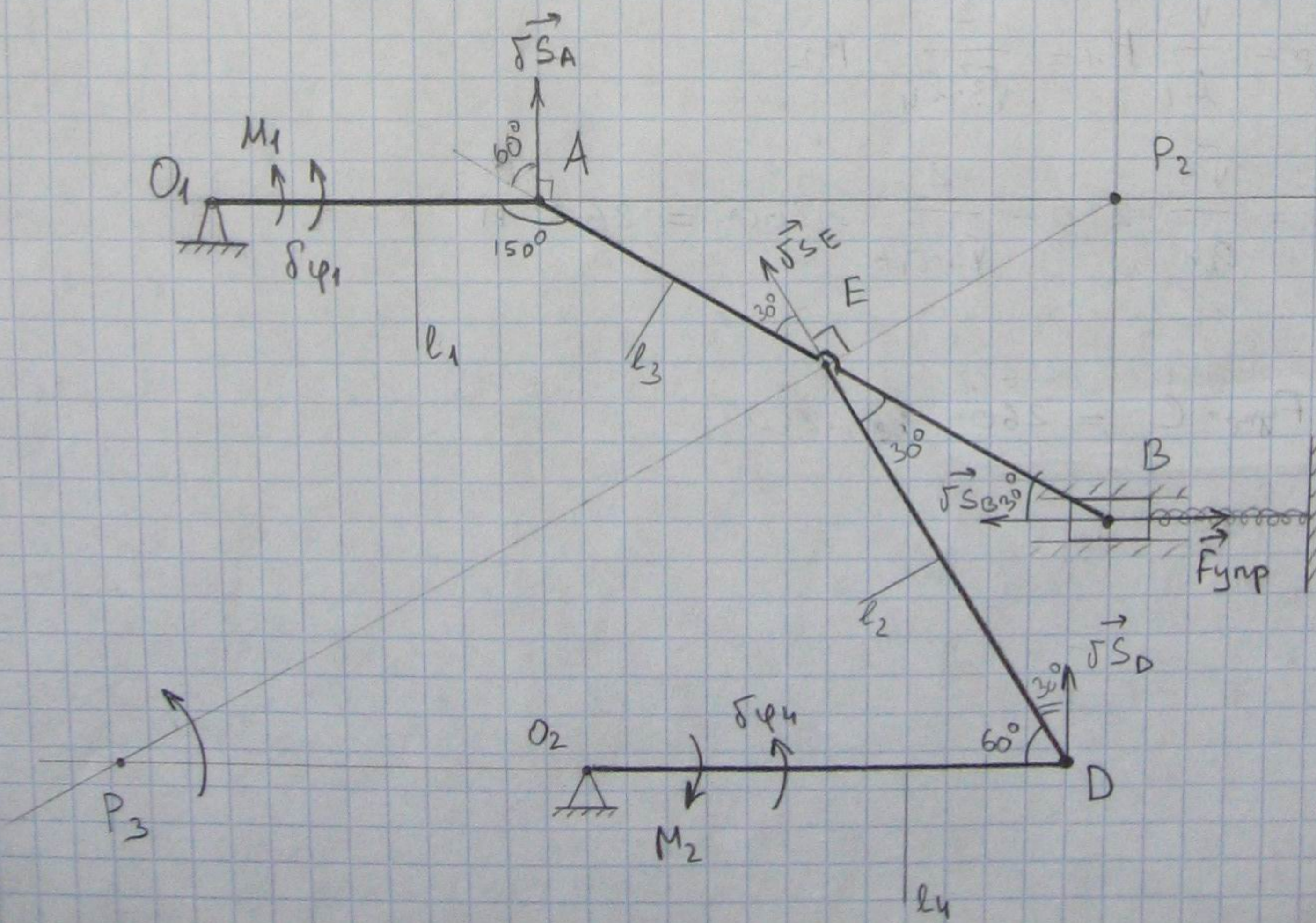
$l_1 = 0{,}4$ м
$l_4 = 0{,}6$ м

l_2, l_3 – произв.

E – середина

$F_{упр}$ – ?

1



$\delta A: \quad M_1 \cdot \delta\varphi_1 - F_{упр} \cdot \delta S_B - M_2 \cdot \delta\varphi_4 = 0$

$\delta S_A = \delta\varphi_1 \cdot l_1$

$\delta S_A \cdot \cos 60^\circ = \delta S_B \cdot \cos 30^\circ \quad \Rightarrow \quad \delta S_B = \dfrac{\delta S_A}{\sqrt{3}} = \dfrac{\delta\varphi_1 \cdot l_1}{\sqrt{3}}$

$\delta S_E \cdot \cos 30^\circ = \delta S_A \cdot \cos 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \delta S_E = \dfrac{\delta S_A}{\sqrt{3}} = \dfrac{\delta\varphi_1 \cdot l_1}{\sqrt{3}}$

$\delta S_E = \delta S_D \cdot \cos 30^\circ \quad \Rightarrow \quad \delta S_D = \dfrac{2\delta S_E}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\delta S_A = \dfrac{2}{3}\delta\varphi_1 \cdot l_1$

$\delta\varphi_4 = \dfrac{\delta S_D}{l_4} = \dfrac{2\,\delta\varphi_1 l_1}{3\, l_4}$

$M_1 \cdot \cancel{\delta\varphi_1} - F_{упр} \cdot \dfrac{\cancel{\delta}\varphi_1 \cdot l_1}{\sqrt{3}} - M_2 \cdot \dfrac{2\,\cancel{\delta\varphi_1}\, l_1}{3\, l_4} = 0$

$M_1 - F_{упр} \cdot \dfrac{l_1}{\sqrt{3}} - M_2 \cdot \dfrac{2}{3}\dfrac{l_1}{l_4} = 0$

$F_{упр} \cdot \dfrac{l_1}{\sqrt{3}} = M_1 - M_2 \cdot \dfrac{2}{3}\dfrac{l_1}{l_4}; \quad F_{упр} = \dfrac{\sqrt{3}}{l_1} M_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{l_1}} \cdot \dfrac{2}{3}\dfrac{\cancel{l_1}}{l_4} \cdot M_2$

$F_{упр} = \dfrac{\sqrt{3}}{l_1} M_1 - \dfrac{2}{\sqrt{3} \cdot l_4} \cdot M_2$

$F_{упр} = \dfrac{\sqrt{3}}{0{,}4} \cdot 220 - \dfrac{2}{\sqrt{3} \cdot 0{,}6} \cdot 360 = 260 \text{ Н}.$

$\lambda = \dfrac{F_{упр}}{c} = \dfrac{260}{120} = 2{,}2 \text{ см}.$

ВВ-2-06

$R_1 = R_2 = R_4 = R$

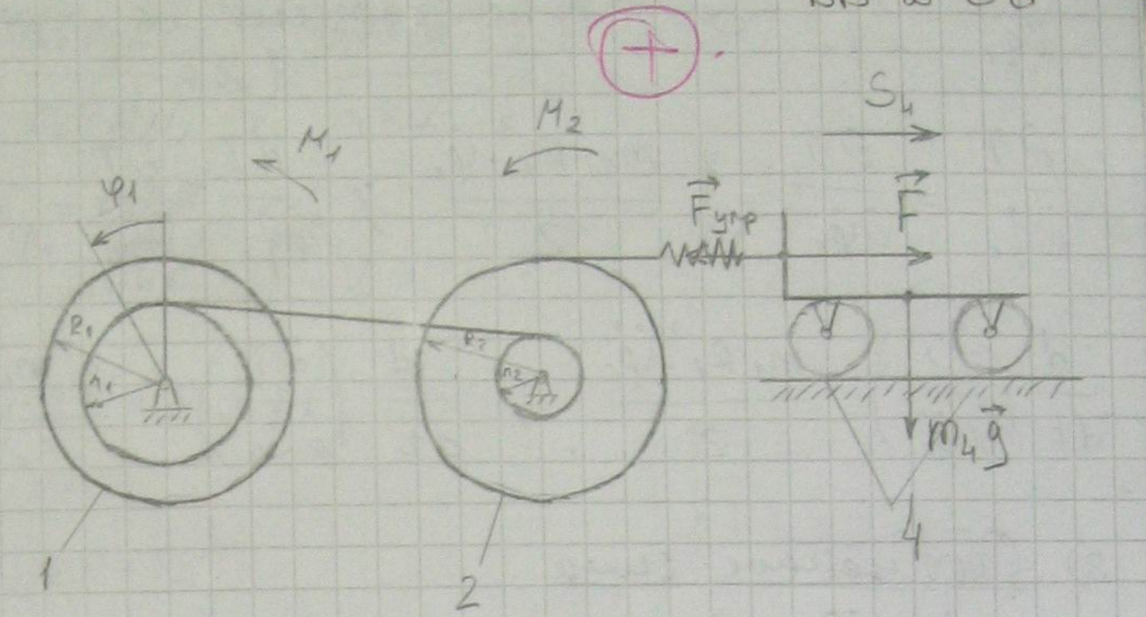
$r_1 = 0{,}8R$
$r_2 = 0{,}4R$

$P_1 = 2P$
$P_2 = 0$
$P_4 = P$

$F = 2P$

$M_1 = M_2 = 0$

AB - пружина



2 степени свободы => 2 обобщённые коорд.

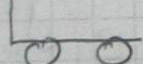
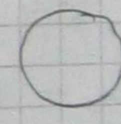
$q_1 = \varphi_1$, угол поворота блока

$q_2 = S_4$, перемещение тележки

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

1) Кинетическая энергия

Заменим тележку  на цилиндр  масса P радиус $R_4 = R$

$$T_1 = \frac{J_1 \omega_1^2}{2}, \quad J_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2} \quad \text{(вращательное движение)}$$

$T_2 = 0$ (т.к $P_2 = 0$);

$$T_4 = \frac{m_4 v_4^2}{2} + \frac{J_4 \omega_4^2}{2}, \quad J_4 = \frac{m_4 R_4^2}{2} \quad \text{(плоско-параллельное движение)}$$

$T = T_1 + T_4$

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1; \quad v_4 = \dot{S}_4; \quad v_4 = \omega_4 \cdot R_4 \Rightarrow \omega_4 = \frac{v_4}{R_4} = \frac{\dot{S}_4}{R_4}$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 R_1^2}{2} \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_4 \cdot \dot{S}_4^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_4 \cancel{R_4^2}}{2} \cdot \frac{\dot{S}_4^2}{\cancel{R_4^2}} =$$

$$= \frac{m_1 R_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2}{4} + \frac{3 \cdot m_4 \dot{S}_4^2}{4}$$

Это выражение зависит только от скоростей, поэтому:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0$$ — т.е. не зависит от перемещений.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{m_1 \cdot R_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1}{2} \; ; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{S}_4} = \frac{3 \cdot m_4 \cdot \dot{S}_4}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{m_1 R_1^2 \ddot{\varphi}_1}{2} \; ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_4}\right) = \frac{3 \cdot m_4 \cdot \ddot{S}_4}{2}$$

2) Обобщённые силы

$$\delta A = \sum \vec{F}_k \cdot \delta \vec{S}_k = \sum Q_i \cdot \delta q_i$$

а) $\delta q_1 \neq 0 \;, \; \delta q_2 = 0$

$$\delta A_1 = \underbrace{M_1 \cdot \delta \varphi_1}_{=0} + \underbrace{M_2 \cdot \delta \varphi_2}_{=0} - F_{упр} \cdot \delta \varphi_2 \cdot R_2 \; ; \quad \delta \varphi_2 = \frac{\delta \varphi_1 \cdot r_1}{r_2}$$

$$F_{упр} = C \cdot \lambda = C \cdot (R_2 \cdot \varphi_2 + S_4) = C \cdot \left(R_2 \cdot \frac{\varphi_1 \cdot r_1}{r_2} + S_4\right)$$

$$\delta A_1 = -C \cdot \left(\frac{\varphi_1 \cdot r_1 \cdot R_2}{r_2} + S_4\right) \cdot \frac{\delta \varphi_1 \cdot r_1 \cdot R_2}{r_2} = \delta \varphi_1 \cdot \underbrace{\left[-C\left(\frac{\varphi_1 \cdot r_1 \cdot R_2}{r_2} + S_4\right) \cdot \frac{r_1 \cdot R_2}{r_2}\right]}_{Q_1}$$

б) $\delta q_1 = 0 \;, \; \delta q_2 \neq 0$

$$\delta A_2 = F \cdot \delta S_4 - F_{упр} \cdot \delta S_4 = \delta S_4 \cdot \underbrace{\left[F - C\left(R_2 \cdot \frac{\varphi_1 \cdot r_1}{r_2} + S_4\right)\right]}_{Q_2}$$

3) Уравнения Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 \cdot R_1^2 \cdot \ddot{\varphi}_1}{2} = -C \cdot \left(\dfrac{\varphi_1 \cdot r_1 \cdot R_2}{r_2} + S_4\right) \cdot \dfrac{r_1 R_2}{r_2} \\ \dfrac{3 \cdot m_4 \cdot \ddot{S}_4}{2} = F - C \cdot \left(R_2 \cdot \dfrac{\varphi_1 r_1}{r_2} + S_4\right) \end{cases}$$

Подставляем данные в уравнение

Красняков
ВВ-2-06

$$\begin{cases} \frac{\cancel{2}P\cdot R^2}{\cancel{4}\cdot g}\cdot\ddot{\varphi}_1 = -c\cdot\left(\varphi_1\cdot\frac{0{,}8R\cdot\cancel{R}}{0{,}4\cancel{R}}+S_4\right)\cdot\frac{0{,}8R\cdot\cancel{R}}{0{,}4\cdot\cancel{R}} \\ \frac{3\cdot P}{2\cdot g}\cdot\ddot{S}_4 = 2P - c\left(\varphi_1\cdot\frac{0{,}8\cdot\cancel{R}}{0{,}4\cancel{R}}+S_4\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{P}{g}\cdot R^2\cdot\ddot{\varphi}_1 = -c\cdot(\varphi_1\cdot 2R+S_4)\cdot 2R \\ \frac{3P}{2g}\cdot\ddot{S}_4 = 2P - c\cdot\left(\varphi_1\cdot 2R+S_4\right)\end{cases}$$

Рассматриваем однородные уравнения. Ищем решение в виде: $\varphi_1 = A_1\cdot\sin kt$, $\ddot{\varphi}_1 = -A_1\cdot k^2\cdot\sin kt$

$S_4 = A_2\cdot\sin kt$, $\ddot{S}_4 = -A_2 k^2\cdot\sin kt$

$$\begin{cases} -\frac{P}{g}\cdot R^2\cdot A_1\cdot k^2\cdot\cancel{\sin kt} = -c\left(A_1\cdot\cancel{\sin kt}\cdot 2R + A_2\cdot\cancel{\sin kt}\right)\cdot 2R \\ -\frac{3P}{2g}\cdot A_2 k^2\cdot\cancel{\sin kt} = -c\left(A_1\cdot\cancel{\sin kt}\cdot 2R + A_2\cdot\cancel{\sin kt}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1\cdot\frac{P}{g}\cdot R^2\cdot k^2 = c\cdot(A_1\cdot 2R+A_2)\cdot 2R \\ A_2\cdot\frac{3P}{2g}\cdot k^2 = c\cdot\left(A_1\cdot 2R+A_2\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1\cdot\left(\frac{P}{g}\cdot R^2\cdot k^2 - 4cR^2\right) - A_2\cdot 2cR = 0 \\ -A_1\cdot 2cR + A_2\cdot\left(\frac{3P}{2g}\cdot k^2 - c\right) = 0\end{cases}$$

Для $\exists$ ненулевого решения: $\det = 0$

$$\left(\frac{P}{g}\cdot R^2\cdot k^2 - 4cR^2\right)\left(\frac{3P}{2g}\cdot k^2 - c\right) - 4c^2R^2 = 0$$

$$\cancel{k^4}^{\,2}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{P^2R^2}{g^2} - 4cR^2\cdot\frac{3P}{2g}\cdot\cancel{k^2} - c\cdot\frac{P}{g}\cdot R^2\cdot\cancel{k^2} + \cancel{4c^2R^2} - \cancel{4c^2R^2} = 0$$

$$k^2\cdot\frac{3}{2}\,\frac{P^{\cancel{2}}\cancel{R^2}}{g^{\cancel{2}}} = 7\cdot c\cancel{R^2}\frac{\cancel{P}}{\cancel{g}}$$

$$k^2 = \frac{14}{3}\,\frac{c\cdot g}{P}$$

$$k = \sqrt{\frac{14}{3}\cdot\frac{c\cdot g}{P}}$$

$$[k] = \sqrt{\frac{\cancel{Н}\ \cancel{м}}{\cancel{м}\cdot c^2\cancel{Н}}} = \frac{рад}{c}$$

Ответ: $k = \sqrt{\frac{14}{3}\,\frac{c\cdot g}{P}}$