ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)”

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

IV СЕМЕСТР

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ФАКУЛЬТЕТОВ ВМС И КИБЕРНЕТИКИ

МОСКВА 2008

Составители: Н.В.Белецкая, И.П.Драгилева, С.В.Костин,
О.В.Мукина, А.Л.Шелепин

Редактор Ю.И.Худак

Контрольные задания являются типовым расчетом по теории функций комплексного переменного (математический анализ, IV семестр), входящей в программу дневного отделения факультетов Кибернетики и ВМС. Типовой расчет выполняется студентами в письменном виде и сдается преподавателю до начала зачетной сессии. Приведенные в работе вопросы к зачетам и экзаменам могут быть уточнены и дополнены лектором. При составлении контрольных заданий за основу были взяты типовые расчеты, разработанные коллективом кафедры высшей математики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета университета.

Рецензенты: И.А. Соловьев
Н.В. Музылев

Контрольные задания напечатаны в авторской редакции

Подписано в печать 30.01.2008. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 1,40. Усл.кр.-отт. 5,58. Уч.-изд.л. 1,5.
Тираж 180 экз. С

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)”
119454, Москва, просп. Вернадского, 78

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
(ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО)

IV семестр

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Каков геометрический смысл тождества
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)?$$

2. Найти область, заданную неравенствами
$$\alpha < \arg(z - z_0) < \beta \qquad (-\pi < \alpha < \beta \leqslant \pi).$$

3. Найти область, заданную неравенством $|z| < \arg z$, если $0 \leqslant \leqslant \arg z < 2\pi$.

4. Найти ошибку в рассуждении, приводящем к парадоксу Бернулли: $(-z)^2 = z^2$, поэтому $2\,\mathrm{Ln}(-z) = 2\,\mathrm{Ln}\,z$, и следовательно, $\mathrm{Ln}(-z) = \mathrm{Ln}\,z$.

5. Совпадают ли множества значений $a^{2\alpha}$, $(a^\alpha)^2$, $(a^2)^\alpha$? Рассмотреть для $a = \alpha = i$.

6. Для отображения $w = z^2$ найти образы линий $y = c$ и $|z| = R$. Какие из них преобразуются взаимно-однозначно?

7. Для отображения $w = e^z$ найти образ линии $x = y$ и прообраз линии $\rho = \theta$, $0 \leqslant \theta < \infty$ (ρ, θ – полярные координаты).

8. Доказать, что функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема.

9. Доказать, что функция $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ дифференцируема только в точке $z = 0$, найти $f'(0)$.

10. Доказать, что для функции $f(z) = \sqrt{|xy|}$ в точке $z = 0$ выполняются условия Коши-Римана, но производная не существует.

11. Будут ли гармоническими функции $|f(z)|$, $\arg f(z)$, если $f(z)$ – регулярная функция?

12. Доказать, что производные (любого порядка) гармонической функции также являются функциями гармоническими.

13. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается,

если отображение осуществляется функцией $w = z^2$, $w = 1/z$, $w = e^z$?

14. Пусть функция $g(z)$ регулярна в точке $z = a$, причем $g(a) = b$ и функция $f(w)$ имеет в точке $w = b$ полюс порядка m. Доказать, что функция $F(z) = f(g(z))$ имеет в точке $z = a$ полюс порядка mn, где n – порядок нуля функции $g(z) - b$ в точке $z = a$.

15. Пусть функция $g(z)$ регулярна в точке $z = a$ и $g(a) = b$, а функция $f(w)$ имеет в точке $w = b$ существенно особую точку. Доказать, что точка $z = a$ – существенно особая точка функции $F(z) = f(g(z))$.

16. Для каких рациональных функций

$$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

точка ∞ является устранимой особой точкой? Неустранимой особой точкой? Каков тип этой особой точки?

17. Построить пример функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности: полюс второго порядка в точке $z = 0$ и простой полюс на бесконечности.

18. Построить пример функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности: 3 полюса первого порядка.

19. Найти общий вид функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности: полюс порядка 2 в точке $z = 0$ и полюс порядка 2 на бесконечности.

20. Найти общий вид функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности: полюс порядка 2 на бесконечности.

21. Доказать, что если $f(z)$ непрерывна в окрестности точки $z = a$, то

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a).$$

В чем отличие этого утверждения от интегральной формулы Коши?

22. Доказать, что для функции $f(z)$ имеет место равенство

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=-a} f(z),$$

если $f(z)$ – четная, и равенство

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-a} f(z),$$

если $f(z)$ – нечетная. Предполагается, что написанные вычеты имеют смысл.

23. Пусть $f(z) = g(az)$, где $a \not\equiv 0$. Доказать, что

$$\operatorname*{res}_{z=az_0} f(z) = \frac{1}{a} \operatorname*{res}_{z=z_0} g(z).$$

24. Найти $\operatorname{res} f(\varphi(z))$, если функция $\varphi(z)$ регулярна в точке a и $\varphi'(z) \not\equiv 0$, а $f(z)$ имеет в точке $\varphi(a)$ полюс первого порядка с вычетом, равным A.

25. Доказать, что к интегралу $\int\limits_{\Gamma} e^{-z^2} dz$, взятому по границе Γ полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, теорема о вычетах неприменима.

26. Сколько корней уравнения $z^4 - 5z + 1 = 0$ находится в круге $|z| < 1$?

27. Сколько корней уравнения $z^4 - 5z + 1 = 0$ находится в кольце $1 < |z| < 3$?

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1 ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Вариант 31. $z = -\dfrac{17}{7\sqrt{3}} + \operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{12} + i\dfrac{\ln 12}{4}\right).$

Условие задачи см. на стр. 12.

Приведем кратко теоретические сведения, которые будут использоваться при решении задачи.

Теоретические сведения.

1. Определение. Запись комплексного числа z в виде

$$z = x + iy, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, называется *алгебраической формой* числа z.

2. Определение. Если $z = x + iy$, где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, то число

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

называется *модулем* числа z.

3. Модуль произведения двух комплексных чисел. Если $z = z_1 z_2$, то

$$|z| = |z_1| \cdot |z_2|. \tag{3}$$

4. Определение. Пусть $z = x + iy$, где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, и пусть $z \neq 0$. Действительное число φ такое, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \tag{5}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{|z|}, \tag{6}$$

$$\varphi \in (-\pi,\ \pi], \tag{7}$$

называется *главным значением аргумента* комплексного числа z и обозначается символом $\arg z$.

5. Пусть $\varphi \in \mathbb{R}$. Комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ обозначается символом $e^{i\varphi}$:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{8}$$

Формула (8) называется формулой Эйлера.

6. Если $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, то

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{9}$$

$$z = re^{i\varphi}. \tag{10}$$

7. Определение. Запись комплексного числа z ($z \neq 0$) в виде (9), где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, называется *тригонометрической формой* числа z.

8. Определение. Запись комплексного числа z ($z \neq 0$) в виде (10), где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, называется *показательной формой* числа z.

9. Если $z = re^{i\varphi}$, где $r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $\varphi \in (-\pi,\ \pi]$, то $|z| = r$, $\arg z = \varphi$, то есть $z = re^{i\varphi}$ — показательная форма числа z.

10. Если $z{=}re^{i\varphi}$, где $r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $\varphi \notin (-\pi,\ \pi]$, то $|z| = r$, а

$$\arg z = \varphi + 2\pi k, \tag{11}$$

где целое число k является решением двойного неравенства

$$-\pi < \varphi + 2\pi k \leqslant \pi. \tag{12}$$

11. Возведение комплексного числа в целую степень. Пусть $n{\in}\mathbb{Z}$. Если $z{=}re^{i\varphi}$ – показательная форма числа z ($z{\in}\mathbb{C}$, $z{\neq}0$), то

$$z^n = r^n e^{in\varphi}. \tag{13}$$

Формула (13) называется формулой Муавра.

12. Извлечение корня из комплексного числа. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant$ $\geqslant 2$. Если $z = re^{i\varphi}$ — показательная форма числа z ($z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$), то все значения корня степени m из числа z можно найти по формуле

$$w_k = \sqrt[m]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2\pi}{m}k\right)}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1. \tag{14}$$

13. Определение. Функция *экспонента* комплексной переменной $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) определяется следующей формулой:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{15}$$

14. Определение. Функции *косинус*, *синус*, *тангенс* и *котангенс* комплексной переменной z определяются следующими формулами:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{16}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{17}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad (\text{если } \cos z \neq 0), \tag{18}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad (\text{если } \sin z \neq 0). \tag{19}$$

15. Определение. Функции *косинус гиперболический*, *синус гиперболический*, *тангенс гиперболический* и *котангенс гиперболический* комплексной переменной z определяются следующими формулами:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \tag{20}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \tag{21}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \quad (\text{если } \operatorname{ch} z \neq 0), \tag{22}$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \quad (\text{если } \operatorname{sh} z \neq 0). \tag{23}$$

Решение задачи.

1) Пусть $z_1 = \dfrac{5\pi}{12} + i\dfrac{\ln 12}{4}$, $z_2 = \operatorname{tg} z_1$. Тогда $z = -\dfrac{17}{7\sqrt{3}} + z_2$.

Из формул (16), (17) и (18) следует, что

$$z_2 = \operatorname{tg} z_1 = \frac{\sin z_1}{\cos z_1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на e^{iz_1} и учтем, что $\dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = -i$. Получим:

$$z_2 = (-i) \cdot \frac{e^{2iz_1} - 1}{e^{2iz_1} + 1}. \tag{$*$}$$

Имеем: $2iz_1 = -\dfrac{1}{2}\ln 12 + i\dfrac{5\pi}{6} = \ln \dfrac{1}{\sqrt{12}} + i\dfrac{5\pi}{6} = \ln \dfrac{1}{2\sqrt{3}} + i\dfrac{5\pi}{6}.$

По формуле (15) находим:

$$e^{2iz_1} = e^{\ln\frac{1}{2\sqrt{3}}}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{i}{4\sqrt{3}}.$$

Подставим полученный результат в формулу (∗):

$$z_2 = (-i)\cdot\frac{\left(-\frac{1}{4} + \frac{i}{4\sqrt{3}}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{4} + \frac{i}{4\sqrt{3}}\right) + 1} = \frac{1 + 5i\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + i}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на число, комплексно сопряженное к знаменателю, то есть на $3\sqrt{3} - i$. После упрощений получим: $z_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{7} + \dfrac{11}{7}i$.

Итак, $z = -\dfrac{17}{7\sqrt{3}} + z_2 = -\dfrac{11}{7\sqrt{3}} + \dfrac{11}{7}i$ — алгебраическая форма числа z.

Используя формулы (2) и (3), находим модуль числа z:

$$|z| = \left|\frac{11}{7\sqrt{3}}(-1 + i\sqrt{3})\right| = \left|\frac{11}{7\sqrt{3}}\right|\cdot|-1 + i\sqrt{3}\,| = \frac{11}{7\sqrt{3}}\cdot 2 = \frac{22}{7\sqrt{3}}.$$

По формулам (5) и (6) находим косинус и синус числа $\varphi = \arg z$:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = -\frac{11}{7\sqrt{3}}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{22} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{11}{7}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{22} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Учитывая, что $\varphi \in (-\pi,\ \pi]$, находим: $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

Итак, $z = \dfrac{22}{7\sqrt{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{22}{7\sqrt{3}}\left[\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right]$ — показательная и тригонометрическая форма числа z.

2) Поскольку $N = 31$, то $p = 1$ и $n = (-1)^p(p + 10) = -11$.
По формуле (13) находим:

$$\tilde{z} = z^n = \left(\frac{22}{7\sqrt{3}}\right)^{-11} e^{i(-11)\frac{2\pi}{3}} = \left(\frac{7\sqrt{3}}{11}\right)^{11} e^{i(-\frac{22\pi}{3})}.$$

Поскольку $\left(-\dfrac{22\pi}{3}\right) \notin (-\pi, \pi]$, то число $\left(-\dfrac{22\pi}{3}\right)$ не является главным значением аргумента числа $\tilde{z}$.

По формуле (19) имеем:

$$\arg \tilde{z} = -\frac{22\pi}{3} + 2\pi k, \tag{$**$}$$

где целое число k является решением двойного неравенства (20):

$$-\pi < -\frac{22\pi}{3} + 2\pi k \leqslant \pi.$$

Отсюда $3\dfrac{1}{6} < k \leqslant 4\dfrac{1}{6}$. Поскольку число k целое, то $k = 4$, и по формуле ($**$) находим:

$$\arg \tilde{z} = -\frac{22\pi}{3} + 2\pi \cdot 4 = \frac{2\pi}{3}.$$

Итак, $\tilde{z} = \left(\dfrac{7\sqrt{3}}{22}\right)^{11} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(\dfrac{7\sqrt{3}}{22}\right)^{11} \left[\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \sin\dfrac{2\pi}{3}\right] = -\dfrac{7^{11}3^5\sqrt{3}}{11^{11}2^{12}} + i\dfrac{7^{11}3^6}{11^{11}2^{12}}$ — показательная, тригонометрическая и алгебраическая форма числа $\tilde{z}$.

3) Поскольку число $N = 31$ нечетно, то $m = 3$.

По формуле (14) имеем:

$$w_k = \sqrt[3]{\frac{22}{7\sqrt{3}}}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k\right)}, \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Если $k = 0$, то $w_0 = \sqrt[3]{\dfrac{22}{7\sqrt{3}}}\, e^{i\frac{2\pi}{9}} = \sqrt[3]{\dfrac{22}{7\sqrt{3}}} \left[\cos\dfrac{2\pi}{9} + i \sin\dfrac{2\pi}{9}\right]$ — показательная и тригонометрическая форма числа w_0.

Если $k = 1$, то $w_1 = \sqrt[3]{\dfrac{22}{7\sqrt{3}}}\, e^{i\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\dfrac{22}{7\sqrt{3}}} \left[\cos\dfrac{8\pi}{9} + i \sin\dfrac{8\pi}{9}\right]$ — показательная и тригонометрическая форма числа w_1.

Если $k = 2$, то $w_2 = \sqrt[3]{\dfrac{22}{7\sqrt{3}}}\, e^{i\frac{14\pi}{9}}$. Поскольку $\dfrac{14\pi}{9} \notin (-\pi, \pi]$, то число $\dfrac{14\pi}{9}$ не является главным значением аргумента числа w_2.

В данном случае, не решая двойное неравенство (12), легко заметить, что $k = -1$ и

$$\arg w_2 = \frac{14\pi}{9} - 2\pi = -\frac{4\pi}{9} \in (-\pi,\ \pi].$$

Итак, $w_2 = \sqrt[3]{\dfrac{22}{7\sqrt{3}}}\, e^{i(-\frac{4\pi}{9})} = \sqrt[3]{\dfrac{22}{7\sqrt{3}}} \left[\cos\left(-\dfrac{4\pi}{9}\right) + i \sin\left(-\dfrac{4\pi}{9}\right)\right]$ — показательная и тригонометрическая форма числа w_2.

4) С помощью калькулятора находим:

$$|z| = \frac{22}{7\sqrt{3}} = 1,814\ldots,$$

$$|w_k| = \sqrt[3]{\frac{22}{7\sqrt{3}}} = 1,219\ldots \quad (k = 0,\ 1,\ 2).$$

С помощью циркуля и линейки рисуем окружности C и C_1 радиусов $|z|$ и $|w_k|$ с центром в начале координат. Масштаб выбираем так, чтобы большая из этих окружностей имела на рисунке радиус 4—5 см.

С помощью транспортира откладываем от положительного луча оси абсцисс угол $\dfrac{2\pi}{3} = 120^\circ$ против часовой стрелки (луч R), угол $\dfrac{2\pi}{9} = 40^\circ$ против часовой стрелки (луч R_1), угол $\dfrac{8\pi}{9} = 160^\circ$ против часовой стрелки (луч R_2) и угол $\dfrac{4\pi}{9} = 80^\circ$ по часовой стрелке (луч R_3). Начала всех лучей находятся в начале координат.

В точке пересечения луча R с окружностью C отмечаем точку z. В точках пересечения лучей R_1, R_2, R_3 с окружностью C_1 отмечаем точки w_0, w_1, w_2.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Дано комплексное число z.

1) Записать число z в алгебраической, показательной и тригонометрической форме.
2) Записать в показательной, тригонометрической и алгебраической форме число $\tilde{z} = z^n$, где $n = (-1)^p(p+10)$, p — последняя цифра номера варианта N (например, если $N=7, 17, 27$, то $p=7$).
3) Записать в показательной и тригонометрической форме каждое значение w_k ($k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$) корня степени $m = 3$ (нечетные варианты) или $m = 4$ (четные варианты) из числа z.
4) Изобразить число z и числа w_k на одной комплексной плоскости. Рекомендуется использовать калькулятор, линейку, циркуль и транспортир.

Замечание. При записи комплексных чисел в показательной и тригонометрической форме следует указывать *главное* значение аргумента, которое принадлежит промежутку $(-\pi,\ \pi]$.

N	z	N	z
1	$\dfrac{1}{2} + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + i\ln 2\right)$	2	$\dfrac{7}{6} + \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + i\ln 3\right)$
3	$-\dfrac{5\sqrt{3}}{7} - \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} - i\dfrac{\ln 3}{2}\right)$	4	$-\dfrac{\sqrt{3}}{7} - \mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{3} - i\dfrac{\ln 2}{2}\right)$
5	$\dfrac{1}{2\sqrt{3}} - \mathrm{ch}\left(\ln 3 + i\dfrac{\pi}{6}\right)$	6	$\dfrac{7}{4\sqrt{3}} - \mathrm{sh}\left(\ln 2 + i\dfrac{\pi}{6}\right)$
7	$1 - \mathrm{th}\left(\dfrac{\ln 3}{4} + i\dfrac{5\pi}{12}\right)$	8	$\dfrac{1}{7} - \mathrm{cth}\left(\dfrac{\ln 3}{4} + i\dfrac{5\pi}{12}\right)$
9	$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + i\ln 4\right)$	10	$-\sqrt{2} + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + i\ln 2\right)$
11	$\dfrac{3}{5} - \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} - i\dfrac{\ln 2}{4}\right)$	12	$1 - \mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{8} - i\dfrac{\ln 2}{4}\right)$
13	$\dfrac{1}{5\sqrt{2}} + \mathrm{ch}\left(\ln 5 - i\dfrac{3\pi}{4}\right)$	14	$\dfrac{3}{\sqrt{2}} + \mathrm{sh}\left(\ln 3 - i\dfrac{3\pi}{4}\right)$

N	z	N	z
15	$-\dfrac{1}{7}+\operatorname{th}\left(\ln 2-i\dfrac{\pi}{6}\right)$	16	$-\dfrac{27}{13}+\operatorname{cth}\left(\ln 2-i\dfrac{\pi}{6}\right)$
17	$1+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-i\ln 2\right)$	18	$\dfrac{7}{4}+\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-i\ln 4\right)$
19	$\dfrac{\sqrt{3}}{7}+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12}+i\dfrac{\ln 3}{4}\right)$	20	$\sqrt{3}+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{12}+i\dfrac{\ln 3}{4}\right)$
21	$-\dfrac{1}{12}-\operatorname{ch}\left(\ln 6+i\dfrac{2\pi}{3}\right)$	22	$-1-\operatorname{sh}\left(\ln 2+i\dfrac{2\pi}{3}\right)$
23	$1+\operatorname{th}\left(\dfrac{\ln 2}{4}-i\dfrac{3\pi}{8}\right)$	24	$\dfrac{1}{5}+\operatorname{cth}\left(\dfrac{\ln 2}{4}-i\dfrac{3\pi}{8}\right)$
25	$\dfrac{1}{7\sqrt{2}}-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+i\ln 7\right)$	26	$\dfrac{1}{3\sqrt{2}}-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+i\ln 3\right)$
27	$-\dfrac{11}{7\sqrt{3}}-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}+i\ln 2\right)$	28	$-\dfrac{\sqrt{3}}{13}-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{6}+i\ln 2\right)$
29	$\dfrac{1}{2}+\operatorname{ch}\left(\dfrac{\ln 3}{2}+i\dfrac{5\pi}{6}\right)$	30	$\dfrac{5}{6}+\operatorname{sh}\left(\dfrac{\ln 3}{2}+i\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Задача 2. Решить уравнение. Изобразить корни уравнения на комплексной плоскости.

N	уравнение	N	уравнение
1	$z^6+2z^3+1=0$	2	$e^{2z}+2e^z-3=0$
3	$\sin z-i\cos z=1$	4	$z^8+[(1+i)/(1-i)]^2=0$
5	$e^z+i\sqrt{2}=1$	6	$\sin z=-2$
7	$z^6-2iz^3-1=0$	8	$e^{2z}+(1-2i)e^z-1-i=0$
9	$\cos z=3$	10	$z^6+16iz^3-64=0$
11	$\operatorname{ch} z-\operatorname{sh} z=\sqrt{3}+i$	12	$\cos^2 z-\sin^2 z=i$
13	$z^6-i(2+i)/(1-2i)=0$	14	$i\sin z+\cos z=-1+i$
15	$\sin z\cos z=i/2$	16	$z^4+2z^2+4=0$
17	$\operatorname{sh} iz+\cos z=-1+i\sqrt{3}$	18	$\sin z+i=0$
19	$z^4-z^2+1=0$	20	$\operatorname{sh} z+\cos iz=1-i$
21	$\cos z+i=0$	22	$z^2-2zi^{(1+i)}+i^{2(1+i)}=0$
23	$\operatorname{ch} z-\operatorname{sh} z=\sqrt{3}-i$	24	$z^8+2z^4+1=0$

N	уравнение	N	уравнение
25	$z^2 + 2zi^{(1-i)} + i^{2(1-i)} = 0$	26	$e^z + \sqrt{3} = \sqrt{2}$
27	$z^2 - i^{2/i} = 0$	28	$e^{2z} - 2e^z + 2 = 0$
29	$z^2 + (3+i)/(1-3i) = 0$	30	$e^{2z} - 3e^z - 4 = 0$

Задача 3. Определить, при каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ функция $u(x, y)$ (четные варианты) или $v(x, y)$ (нечетные варианты) является действительной или, соответственно, мнимой частью некоторой регулярной функции $f(z)$. Восстановить $f(z)$.

N	$v(x, y)$	N	$u(x, y)$
1	$e^{-y}(x\cos x - y\sin ax)$	2	$\cos ay \cdot \operatorname{ch} x$
3	$e^{x}(y\cos y + x\sin ay)$	4	$e^{-2y}\cos ax$
5	$\sin y \operatorname{ch} ax$	6	$x\sin x \operatorname{ch} ay - y\cos x \operatorname{sh} y$
7	$y/(ax^2 + y^2)$	8	$x\sin x \operatorname{ch} y + y\cos x \operatorname{sh} ay$
9	$\cos ax \cdot \operatorname{ch}(2y+1)$	10	$1 - e^{ax}\sin y$
11	$\sin x \cdot \operatorname{ch} ay$	12	$\cos x \cdot \operatorname{ch} ay$
13	$2y/(3x^2 - ay^2)$	14	$e^{-y}\sin x + ay$
15	$\cos x \cdot \operatorname{ch}(y - a)$	16	$e^{-y}\cos x + ax$
17	$\sin ay \cdot \operatorname{ch} x$	18	$x/(ax^2 - y^2)$
19	$3y/(2x^2 - ay^2)$	20	$\sin ax \cdot \operatorname{ch} 3y$
21	$3y/(4x^2 - ay^2)$	22	$\cos ax \cdot \operatorname{sh}(ay + 2)$
23	$\sin 3y \cdot \operatorname{sh} ax$	24	$y/(2x^2 + ay^2)$
25	$\sin 2ax \cdot \operatorname{sh} y$	26	$2x/(x^2 + ay^2)$
27	$x^2 - (ay - 1)^2$	28	$\cos(ax + 2) \cdot \operatorname{ch} y$
29	$ax^2 + 4y^2$	30	$ax^2 - y^2 - x$

Задача 4. Дана функция $f(z)$ и дано множество E.

1) Найти образ $E' = f(E)$ множества E при отображении $w = f(z)$ (описать множество E' с помощью неравенств).
2) Изобразить множества E и E' на комплексной плоскости.

N	$f(z)$	E
1	$(\sqrt{3} + i)z^2 + 1 + 5i$	$1/2 < \lvert z\rvert < 1, \quad 0 \leqslant \arg z < \pi/4$
2	$(2 - 2i)z^3 + 2 - i$	$1 < \lvert z\rvert, \quad \pi/4 < \arg z \leqslant 3\pi/4$
3	$e^z + i - 1$	$0 < \operatorname{Re} z \leqslant 2, \quad -\pi/6 < \operatorname{Im} z \leqslant \pi/6$

N	$f(z)$	E
4	$\ln z + 1 - i$	$1 \leqslant \lvert z \rvert < 2, \quad -\pi/6 \leqslant \arg z < \pi/6$
5	$(-\sqrt{3} - i)z^2 - 1 - 5i$	$1 \leqslant \lvert z \rvert < 2, \quad -\pi/4 < \arg z \leqslant 0$
6	$2e^z + 3 - 2i$	$\operatorname{Re} z < 0, \quad \pi/3 \leqslant \operatorname{Im} z < 2\pi/3$
7	$e^{2zi + i\pi/4} + 3i$	$-\pi/4 < \operatorname{Re} z \leqslant \pi/2, \quad 0 < \operatorname{Im} z$
8	$\ln(iz) - 1 + 5i$	$2 \leqslant \lvert z \rvert < 3, \quad 0 \leqslant \arg z < \pi/4$
9	$(-2 + 2i)z^3 - 2 + i$	$2 < \lvert z \rvert \leqslant 3, \quad -3\pi/4 < \arg z \leqslant -\pi/4$
10	$e^{z + i\pi/3} + 2 - 4i$	$1 \leqslant \operatorname{Re} z < 3, \quad -\pi/4 < \operatorname{Im} z \leqslant \pi/3$
11	$\ln(2z) - 3 + 2i$	$\lvert z \rvert < 1, \quad -\pi/4 \leqslant \arg z < \pi/3$
12	$\ln(-z) - 2 + 3i$	$1 \leqslant \lvert z \rvert < 3, \quad -\pi/2 \leqslant \arg z < -\pi/4$
13	$(\sqrt{3} - i)z^2 - 3i$	$2 < \lvert z \rvert \leqslant 5, \quad \pi/6 \leqslant \arg z < \pi/3$
14	$e^{iz + i\pi/8} + 1 + 2i$	$0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi/4, \quad \operatorname{Im} z < 1$
15	$\ln(3z) - 1 - 6i$	$1 \leqslant \lvert z \rvert, \quad \pi/4 < \arg z \leqslant 2\pi/3$
16	$(-1 - i)z^3 + 6 - i$	$\lvert z \rvert < 2, \quad \pi/4 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$
17	$e^{-z + i3\pi/2} - 2 - 3i$	$0 < \operatorname{Re} z \leqslant 1, \quad \pi/6 \leqslant \operatorname{Im} z < \pi/3$
18	$(1 + i)\ln z - 2$	$1 < \lvert z \rvert \leqslant 3, \quad 0 < \arg z \leqslant \pi/6$
19	$(-\sqrt{3} + i)z^3 - 2i$	$1 \leqslant \lvert z \rvert \leqslant 3, \quad \pi/2 < \arg z < 2\pi/3$
20	$e^{3iz - i\pi/4} - i$	$0 < \operatorname{Re} z \leqslant \pi/6, \quad 2 < \operatorname{Im} z$
21	$(1 - i)\ln(2z) + i$	$2 \leqslant \lvert z \rvert < 3, \quad \pi/3 < \arg z \leqslant \pi/2$
22	$(1 - i)z^4 - 2 + 3i$	$1 < \lvert z \rvert, \quad 2\pi/3 \leqslant \arg z \leqslant \pi$
23	$e^{2z + i\pi/2} + 1 + 3i$	$1 \leqslant \operatorname{Re} z < 2, \quad 3\pi/4 \leqslant \operatorname{Im} z < \pi$
24	$i\ln(3z) - 2 - 3i$	$2 \leqslant \lvert z \rvert, \quad \pi/6 < \arg z \leqslant \pi/4$
25	$(2 - 2i)z^2 + 5 - i$	$\lvert z \rvert \leqslant 3, \quad \pi/6 \leqslant \arg z < \pi/2$
26	$e^{-2iz + i\pi/4} - 1 - 3i$	$\pi/3 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi/2, \quad 2 < \operatorname{Im} z$
27	$-i\ln(iz) + 1$	$1 < \lvert z \rvert \leqslant 2, \quad -\pi/4 \leqslant \arg z < -\pi/6$
28	$(1 + i)z^4 - 3 + 2i$	$\lvert z \rvert < 1, \quad -\pi/6 \leqslant \arg z < 0$
29	$e^{-iz - i\pi/2} + 5i$	$0 < \operatorname{Re} z \leqslant \pi/3, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 2$
30	$2\ln(3iz) - 2 + 4i$	$2 \leqslant \lvert z \rvert < 4, \quad -\pi/3 < \arg z \leqslant -\pi/6$

Задача 5. Дана функция $f(z)$ и дано число z_0.

1) Найти все возможные разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана (ряд Тейлора) по степеням $z - z_0$. Указать области, в которых справедливы полученные разложения.

2) Определить, является ли точка z_0 изолированной особой точкой функции $f(z)$. Если да, то, используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0, определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции $f(z)$ в этой точке.
3) Используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$, определить тип особой точки $z = \infty$ и найти вычет функции $f(z)$ в этой точке.

N	$f(z)$	z_0	N	$f(z)$	z_0
1	$\dfrac{z-1}{z(z+1)}$	-1	2	$\dfrac{z^2+2z-4}{z^2(z-2)}$	-2
3	$\dfrac{2z^2-5z+4}{z(z-2)^2}$	2	4	$\dfrac{z+1}{z(z-1)}$	$-3-2i$
5	$\dfrac{z+2}{z^2-1}$	1	6	$\dfrac{z}{(z+2)(z+3)}$	2
7	$\dfrac{3z-1}{z^2-2z-3}$	-1	8	$\dfrac{z}{z^2+4}$	0
9	$\dfrac{2z^2-z+1}{z^3-z}$	1	10	$\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$	0
11	$\dfrac{2z^2+z+2}{z^2(z+2)}$	-2	12	$\dfrac{z^3+3z^2+2z+1}{z^2(z+1)^2}$	-1
13	$\dfrac{2z^2-3z+2}{(z-1)^2z}$	1	14	$\dfrac{3z^2-1}{z(z^2-1)}$	1
15	$\dfrac{z^2-3z+5}{(z+1)(z-2)^2}$	2	16	$\dfrac{1}{z^2-7z+12}$	3
17	$\dfrac{z^2+z+1}{z^3+z}$	0	18	$\dfrac{2}{z^2-4z+3}$	-1
19	$\dfrac{2z^2+z+3}{z^2(z+3)}$	-3	20	$\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$	-1
21	$\dfrac{2z^2+5z+4}{z^2(z+4)}$	0	22	$\dfrac{1}{z^2-5z+6}$	0
23	$\dfrac{3z^2-1}{z^2(z-1)}$	0	24	$\dfrac{2z^2+4z+1}{z(z+1)^2}$	-1
25	$\dfrac{9-2z}{z(3-z)^2}$	3	26	$\dfrac{z+3}{z^2-1}$	$-2-2i$
27	$\dfrac{z^2}{z^2+9}$	0	28	$\dfrac{2z}{z^2+4}$	$-3+2i$
29	$\dfrac{z-1}{z^2+2z}$	$-2-3i$	30	$\dfrac{z-2}{z^2-2z-3}$	$2-2i$

Задача 6. Дана функция $f(z)$ и дано число z_0.

1) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$.
2) Используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана, определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции $f(z)$ в этой точке.
3) Используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана, определить тип особой точки $z = \infty$ и найти вычет функции $f(z)$ в этой точке.

N	$f(z)$	z_0	N	$f(z)$	z_0
1	$z\cos\dfrac{1}{z-2}$	2	2	$\sin\dfrac{z}{z-1}$	1
3	$ze^{z/(z-5)}$	5	4	$\sin\dfrac{2z-1}{z+2}$	-2
5	$\cos\dfrac{3z}{z-i}$	i	6	$\sin\dfrac{5z}{z-2i}$	$2i$
7	$\sin\dfrac{3z-i}{3z+i}$	$-\dfrac{i}{3}$	8	$z\cos\dfrac{3z}{z-1}$	1
9	$z\sin\dfrac{z}{z-1}$	1	10	$(z-3)\cos\dfrac{\pi(z-3)}{z}$	0
11	$z^2\sin\dfrac{\pi(z+1)}{z}$	0	12	$z\cos\dfrac{z}{z+2i}$	$-2i$
13	$\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$	2	14	$\sin\dfrac{z+i}{z-i}$	i
15	$\sin\dfrac{z}{z-3}$	3	16	$ze^{1/(z-2)}$	2
17	$e^{z/(z-3)}$	3	18	$\sin\dfrac{2z}{z-4}$	4
19	$\sin\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$	2	20	$e^{(4z-2z^2)/((z-1)^2)}$	1
21	$ze^{\pi/(z-a)}$	a	22	$ze^{\pi z/(z-\pi)}$	π
23	$z\sin\dfrac{\pi(z+2)}{z}$	0	24	$z\cos\dfrac{\pi(z+3)}{z-1}$	1
25	$z^2\sin\dfrac{z+3}{z}$	0	26	$z\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$	1
27	$z\cos\dfrac{z}{z-3}$	3	28	$z\sin\dfrac{\pi(z-1)}{z-2}$	2
29	$\dfrac{\sin^2 z}{z}$	0	30	$\dfrac{\sin^2(2/z)}{z}$	0

Задача 7. Найти интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ с помощью вычетов. Кривая Γ ориентирована против часовой стрелки.

N	$f(z)$	Γ	N	$f(z)$	Γ
1	$\dfrac{z^2+1}{(2z+3)z^2}$	$\lvert z+1\rvert=2$	2	$\dfrac{\sin z}{z^2(z+4)^2}$	$\lvert z+2\rvert=3$
3	$\dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2+4)(z^2-9)}$	$\lvert z-3-4i\rvert=5$	4	$\dfrac{1}{z^4+1}$	$\lvert z-1\rvert=1$
5	$\dfrac{z(z+1)^2}{\sin^2(2\pi z)}$	$\lvert z-1/5\rvert=1/4$	6	$\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$	$\lvert z-1-i\rvert=2$
7	$\dfrac{\cos z}{z^3-z^2-2z}$	$\lvert z-i\rvert=2$	8	$\dfrac{(z^2+9)^2}{\operatorname{ch} z}$	$\lvert z+3i\rvert=3$
9	$\dfrac{\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)^2}$	$\lvert z-1-i\rvert=\sqrt{3}$	10	$\dfrac{e^z-1}{z(z^2+2z+5)^2}$	$\lvert z-i\rvert=2$
11	$\dfrac{e^z}{z^4+8z^2-9}$	$\lvert z-1-2i\rvert=5/2$	12	$\dfrac{\sin(2z)}{z^2(z^2+4)}$	$\lvert z-2i\rvert=3$
13	$\dfrac{\sin z}{z^2(z-2)^2}$	$\lvert z-2-2i\rvert=3$	14	$\dfrac{z}{(z^2-1)(z-2)^2}$	$\lvert z-2\rvert=3/2$
15	$\dfrac{z^3}{z^4-1}$	$\lvert z+1-i\rvert=\sqrt{2}$	16	$\dfrac{1-e^{4z}}{z(z^2-16)}$	$\lvert z+2\rvert=3$
17	$\dfrac{\cos z}{z^2(z+1)}$	$\lvert z+1-i\rvert=5/4$	18	$\dfrac{\operatorname{sh} z}{z(z^2+2z+5)}$	$\lvert z+i\rvert=2$
19	$\dfrac{e^z}{z(z-1)^2(z-4)}$	$\lvert z-1-i\rvert=2$	20	$\dfrac{z(\sin z+2)}{\sin z(z-1)^2}$	$\lvert z-3/2\rvert=2$
21	$\dfrac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}$	$\lvert z-2-i\rvert=2$	22	$\dfrac{e^z}{z^2(z-\pi i)}$	$\lvert z\rvert=4$
23	$\dfrac{\sin^3(z+2)}{(z+2)^2(z-3)^2}$	$\lvert z+1\rvert=5$	24	$\dfrac{e^z-1}{z^3(z-2)}$	$\lvert z-2\rvert=3$
25	$\dfrac{z-\sin z}{z^3\sin(\pi z)}$	$\lvert z\rvert=3/2$	26	$\dfrac{\cos(z+2)-1}{(z+2)^2(z-3)^2}$	$\lvert z-1-i\rvert=3$
27	$\dfrac{e^z-1}{(z^2-1)^2 z}$	$\lvert z-2\rvert=5/2$	28	$\dfrac{\sin(3z)}{z(z^2-4)^2}$	$\lvert z-1\rvert=2$
29	$\dfrac{1-\cos(2z)}{z^3(z^2+1)}$	$\lvert z-i\rvert=3/2$	30	$\dfrac{e^z-1}{z(z^2+9)^2}$	$\lvert z-2\rvert=3$

Задача 8. Найти несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с помощью вычетов.

N	$f(x)$	(a,b)	N	$f(x)$	(a,b)
1	$\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}$	$(0,+\infty)$	2	$\dfrac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+45}$	$(-\infty,+\infty)$
3	$\dfrac{e^{ix}}{x^2-2ix-2}$	$(-\infty,+\infty)$	4	$\dfrac{(x+1)\cos 3x}{x^2+4x+104}$	$(-\infty,+\infty)$
5	$\dfrac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}$	$(-\infty,+\infty)$	6	$\dfrac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}$	$(-\infty,+\infty)$
7	$\dfrac{(x-1)\cos x}{x^2-4x+5}$	$(-\infty,+\infty)$	8	$\dfrac{x^2+2}{x^4-2ix(x^2+1)-1}$	$(-\infty,+\infty)$
9	$\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$	$(0,+\infty)$	10	$\dfrac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}$	$(-\infty,+\infty)$
11	$\dfrac{1}{x^4-(4ix+5)^2}$	$(-\infty,+\infty)$	12	$\dfrac{x\sin x}{x^2+2x+10}$	$(-\infty,+\infty)$
13	$\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$	$(0,+\infty)$	14	$\dfrac{x^2+2}{(x^2-2ix-5)(x^2+4)}$	$(-\infty,+\infty)$
15	$\dfrac{x\cos x}{x^2-2x+10}$	$(-\infty,+\infty)$	16	$\dfrac{x^2}{(x^2+4)^3}$	$(0,+\infty)$
17	$\dfrac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}$	$(-\infty,+\infty)$	18	$\dfrac{x+5}{(x^2-4ix-13)^3}$	$(-\infty,+\infty)$
19	$\dfrac{e^{ix}}{(x^2+4ix-5)^3}$	$(-\infty,+\infty)$	20	$\dfrac{x^2}{x^4-4ix(x^2+4)-16}$	$(-\infty,+\infty)$
21	$\dfrac{x\sin x}{x^2+9}$	$(0,+\infty)$	22	$\dfrac{\cos x}{x^2+4}$	$(0,+\infty)$
23	$\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$	$(-\infty,+\infty)$	24	$\dfrac{x\sin x}{(x^2+1)^2}$	$(0,+\infty)$
25	$\dfrac{x^2}{x^4-(2ix+3)^2}$	$(-\infty,+\infty)$	26	$\dfrac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}$	$(-\infty,+\infty)$
27	$\dfrac{2x^2+13x}{x^4+13x^2+36}$	$(-\infty,+\infty)$	28	$\dfrac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+409}$	$(-\infty,+\infty)$
29	$\dfrac{\cos x}{(x^2+1)^3}$	$(0,+\infty)$	30	$\dfrac{(x^3-2)\cos(x/2)}{(x^2+2)(x^2+9)}$	$(-\infty,+\infty)$

Задача 9. Используя теорему Руше, найти число нулей функции $F(z)$ в области D (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность).

N	$F(z)$	D
1	$z^5 - 5z^2 + 2z + 1$	$1 < \|z\| < 2$
2	$z^6 - 7z^5 + 3z^3 - z - 1$	$1 < \|z\| < 2$
3	$z^4 - 5z^3 - z^2 - 1$	$1/2 < \|z\| < 1$
4	$2z^5 - 3z^3 + 2z^2 - 5$	$1/2 < \|z\| < 2$
5	$3z^4 + 2z^3 - z^2 - z + 3$	$1/2 < \|z\| < 2$
6	$2z^3 - 7z^2 + 3z + 1$	$1 < \|z\| < 4$
7	$2z^5 - 8z^4 + z^3 + 2z^2 + z - 1$	$1 < \|z\| < 2$
8	$z^5 - 4z^3 - 10z^2 + 3$	$1 < \|z\| < 3$
9	$3z^6 - 4z^4 + 5z^2 - 15z - 1$	$1 < \|z\| < 2$
10	$2z^4 + 4z^3 - 17z^2 + 3z - 7$	$1 < \|z\| < 5$
11	$5z^5 + 4z^4 - 3z^3 - 2z^2 - 17$	$1 < \|z\| < 2$
12	$z^8 - 3z^5 + 2z^2 - 12z - 3$	$1 < \|z\| < 2$
13	$5z^4 + 2z^3 - 13z^2 + 4z + 1$	$1 < \|z\| < 2$
14	$2z^4 + 3z^3 - z^2 + 11z - 1$	$1/2 < \|z\| < 3$
15	$2z^5 - 5z^4 + 5z - 1$	$2 < \|z\| < 3$
16	$z^6 - 10z^3 + 2z^2 + 3z - 1$	$2 < \|z\| < 3$
17	$z^7 - 5z^5 + 2z^4 + 1$	$1 < \|z\| < 3$
18	$3z^7 + z^6 - 9z^4 + 2z^2 - 2$	$1 < \|z\| < 2$
19	$10z^4 - z^3 + 4z^2 - z - 3$	$1/2 < \|z\| < 1$
20	$2z^3 - 3z^2 - 7z - 1$	$1 < \|z\| < 3$
21	$z^5 + 2z^4 - z^3 - 3z^2 + 13z - 5$	$1 < \|z\| < 4$
22	$z^5 - 2z^2 + 5z + 1$	$1 < \|z\| < 2$
23	$z^4 - 6z^3 + z^2 - 10z + 1$	$1 < \|z\| < 2$
24	$z^3 - 17z^2 + 25z - 5$	$1 < \|z\| < 2$
25	$4z^3 + 10z^2 - 3z + 1$	$2 < \|z\| < 3$
26	$3z^3 + 9z^2 - 5z - 1$	$2 < \|z\| < 4$
27	$2z^4 - z^3 + 6z^2 - z - 1$	$1/4 < \|z\| < 1$
28	$z^6 - 5z^3 + z^2 + 1$	$1/2 < \|z\| < 1$
29	$z^3 - 2z - 5$	$1 < \|z\| < 3$
30	$z^8 + 5z^7 - z^4 + 2$	$4 < \|z\| < 6$

Задача 10. В вариантах 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 25, 28 с помощью вычетов найти оригинал $f(t)$ изображения $F(p)$. Сделать проверку (найти изображение функции $f(t)$, используя таблицу стандартных изображений и свойства преобразования Лапласа, и убедиться, что оно равно $F(p)$).

В вариантах 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 29 с помощью вычетов найти косинус-преобразование Фурье $F_c(\omega)$ функции $f(x)$. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье.

В вариантах 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 30 с помощью вычетов найти синус-преобразование Фурье $F_s(\omega)$ функции $f(x)$. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье.

N	$F(p)$	N	$f(x)$	N	$f(x)$	N	$F(p)$
1	$\frac{p}{p^3+1}$	2	$\frac{1}{(1+x^2)^3}$	3	$\frac{x^3}{1+x^6}$	4	$\frac{p}{p^2-2p+5}$
5	$\frac{p}{(p^2+4)^2}$	6	$\frac{1}{(1+x^2)^2}$	7	$\frac{x}{(1+x^2)^2}$	8	$\frac{1}{p^3+2p^2+p}$
9	$\frac{1}{(p^3-8)^2}$	10	$\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$	11	$\frac{x}{(1+x^2)(9+x^2)}$	12	$\frac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$
16	$\frac{p}{p^4-1}$	14	$\frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)}$	15	$\frac{x^3}{(1+x^2)^3}$	13	$\frac{p-1}{(p^2+1)(p+1)}$
17	$\frac{p}{p^4+1}$	18	$\frac{1}{1+x^4}$	19	$\frac{x}{1+x^4}$	20	$\frac{p-3}{(p^2+2p+5)}$
21	$\frac{1}{(p+1)^3}$	22	$\frac{x^2}{1+x^4}$	23	$\frac{x^3}{1+x^4}$	24	$\frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$
25	$\frac{p^2}{p^6-1}$	26	$\frac{x^2}{1+x^6}$	27	$\frac{x}{1+x^6}$		
28	$\frac{1}{p(p-1)^3}$	29	$\frac{1}{1+x^2}$	30	$\frac{x}{1+x^2}$		

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ (ЗАЧЕТУ)

1. Комплексные числа и действия над ними. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Корни n-ой степени из комплексного числа.

2. Определение регулярной (аналитической) функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.

3. Линейная функция комплексного переменного. Ее регулярность (аналитичность). Отображение, которое она осуществляет.

4. Степенная функция комплексного переменного. Ее регулярность (аналитичность). Область однолистности. Отображение, которое она осуществляет.

5. Показательная функция комплексного переменного. Ее регулярность (аналитичность). Период. Область однолистности. Отображение, которое она осуществляет.

6. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного. Их регулярность (аналитичность). Периоды.

7. Логарифм комплексного переменного. Регулярность (аналитичность). Многозначность отображения, которое он осуществляет.

8. Общая степенная функция комплексного переменного. Регулярность (аналитичность). Многозначность отображения, которое он осуществляет.

9. Гармонические функции. Их связь с регулярными функциями комплексного переменного.

10. Геометрический смысл модуля и аргумента производной регулярной (аналитической) функции. Понятие конформного отображения.

11. Определение интеграла от функции комплексного переменного, его связь с криволинейными интегралами. Основные свойства.

12. Интеграл от регулярной (аналитической) функции, его независимость от пути интегрирования. Формула Ньютона-Лейбница.

13. Интегральная теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.

14. Интегральная формула Коши для регулярной (аналитической) функции.

15. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций. Интегральная формула Коши для производных регулярной (аналитической) функции.

16. Разложение регулярной (аналитической) функции в ряд Тейлора. Область сходимости. Формулы для коэффициентов.

17. Разложение функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана. Формулы для коэффициентов.

18. Изолированные особые точки регулярной (аналитической) функции и их классификация. Примеры.

19. Устранимая особая точка. Ряд Лорана и поведение функции в окрестности этой точки.

20. Полюс n-го порядка. Ряд Лорана и поведение функции в окрестности этой точки.

21. Существенно особая точка. Ряд Лорана и поведение функции в окрестности этой точки.

22. Нули аналитической функции. Порядок нуля. Связь между нулем и полюсом.

23. Вычет аналитической функции в точке. Его связь с рядом Лорана. Основная теорема о вычетах.

24. Формулы для вычисления вычетов в простом и кратном полюсе.

25. Стереографическая проекция. Бесконечно удаленная точка. Ряд Лорана в окрестности бесконечности. Классификация особенностей в бесконечности.

26. Вычет в бесконечно удаленной точке. Его связь с рядом Лорана. Вторая теорема о вычетах.

27. Приложение теории вычетов к вычислению интегралов по вещественной прямой от рациональных функций.

28. Лемма Жордана. Вычисление несобственных интегралов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx.$$

29. Логарифмический вычет. Связь числа нулей и полюсов функции внутри замкнутого контура с интегралом по этому контуру.

30. Принцип аргумента. Теорема Руше.

31. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность по параметру.

32. Интегралы, зависящие от параметра. Интегрирование и дифференцирование по параметру.

33. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Определение равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости.

34. Равномерная непрерывность несобственного интеграла по параметру. Примеры.

35. Интегрирование несобственного интеграла по параметру. Примеры.

36. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру. Примеры.

37. Гамма-функция и ее свойства: формула понижения, связь с факториалом, формула дополнения.

38. Аналитическое продолжение гамма-функции в комплексной плоскости. Ее значения на отрицательной полуоси. Свойства $\Gamma(z)$.

39. Бета-функция. Ее связь с гамма-функцией. Применение к вычислению интегралов. Пример.

40. Определение преобразования Лапласа. Его аналитичность.

41. Определение преобразования Лапласа. Его обращения с помощью вычетов.

42. Степенные ряды. Теорема Абеля.

43. Радиус и круг сходимости степенного ряда. Вычисление радиуса сходимости.

44. Свойства степенных рядов. Сформулировать условия непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости степенного ряда в заданной области.

45. Преобразование Фурье и его свойства.

46. Тригонометрические ряды Фурье: вещественная и комплексная формы записи, ряды Фурье для четных и нечетных функций, разложение функций на полупериоде в ряды по синусам и по косинусам.

47. Тригонометрические ряды Фурье: признаки сходимости и равномерной сходимости, теорема единственности.

49. Свойства коэффициентов ряда Фурье.