<u>Комплексные числа и функции.</u>

1. Комплексные числа (повторение).

1. Основные определения.

Определение 1.

Комплексным числом (КЧ) называется упорядоченная пара действительных чисел: $(a;b)$ $(a;b\in\mathbb{R})$

Определение 2.

Действительные числа $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются соответственно **действительной** (вещественной) и **мнимой** частью КЧ и обозначаются $a=\operatorname{Re}z;\quad b=\operatorname{Im}z$.

Название «КЧ» было предложено Гауссом. Принято обозначать КЧ буквой ***z***:

$$\boxed{z=(a;b)}\,.$$

2. Равенство КЧ. $z_1=(x_1;y_1);\quad z_2=(x_2;y_2)$

$$z_1=z_2\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{Re}z_1=\operatorname{Re}z_2\\ \operatorname{Im}z_1=\operatorname{Im}z_2\end{cases}$$

3. Действительные и чисто мнимые числа.

КЧ $(1;0)$ называется действительной единицей.

КЧ $(0;1)$ называется мнимой единицей. Мнимую единицу в математике обозначают буквой ***i***. Это обозначение ввел Эйлер.

4. Сложение и умножение КЧ.

$z_1\pm z_2=z=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2)$

$z_1\cdot z_2=z=(x_1x_2-y_1y_2;y_1x_2+x_1y_2)$

Если $z_1=z_2=i=(0;1)\quad\Rightarrow\quad z_1\cdot z_2=i\cdot i=(-1;0)=-1$

Таким образом

$$\boxed{i^2=-1}$$

5. Алгебраическая форма КЧ.

Любое КЧ можно представить в виде $z=a(1;0)+b(0;1)$

$\boxed{z=a+bi}$ **- алгебраическая форма** (1)

или $z=\operatorname{Re}z+i\operatorname{Im}z$. Подчеркнем еще раз: $\operatorname{Re}z$ и $\operatorname{Im}z$ - <u>действительные</u> числа.

Если $a=0\quad\Rightarrow\quad z=ib$ - чисто мнимое число.

Если $b=0\quad\Rightarrow\quad z=a$ - чисто действительное число.

Действительные и чисто мнимые числа – это подмножества множества КЧ.

Примеры:

	Комплексное число	Алгебраическая форма	Действительная часть	Мнимая часть
1	$(1;0)$	$z=1$	$\operatorname{Re} z=1$	$\operatorname{Im} z=0$
2	$(0;1)$	$z=i$	$\operatorname{Re} z=0$	$\operatorname{Im} z=1$
3	$(1;1)$	$z=1+i$	$\operatorname{Re} z=1$	$\operatorname{Im} z=1$
4	$(1;-1)$	$z=1-i$	$\operatorname{Re} z=1$	$\operatorname{Im} z=-1$
5	$(0;-1)$	$z=-i$	$\operatorname{Re} z=0$	$\operatorname{Im} z=-1$
6	$(-2;3)$	$z=-2+3i$	$\operatorname{Re} z=-2$	$\operatorname{Im} z=3$
7	$(3;-2)$	$z=3-2i$	$\operatorname{Re} z=3$	$\operatorname{Im} z=-2$
8	$(a;b)$	$z=a+bi$	$\operatorname{Re} z=a$	$\operatorname{Im} z=b$
9	$(0;0)$	$z=0$	$\operatorname{Re} z=0$	$\operatorname{Im} z=0$

6. Геометрический смысл КЧ.

Каждой упорядоченной паре действительных чисел можно поставить в соответствие точку на плоскости с координатами, равными элементам этой пары. Пусть ось абсцисс ($0\boldsymbol{x}$) – действительная ось, ось ординат ($0\boldsymbol{y}$) – мнимая ось. Тогда каждому числу $z=x+iy$ соответствует точка P с координатами $(x;y)$ - см. рис. 1.6.1.

Плоскость, на которой изображаются точками комплексные числа, назовем **комплексной плоскостью**. Обычно ее обозначают: $\mathbb{C}$. $z\in\mathbb{C}$

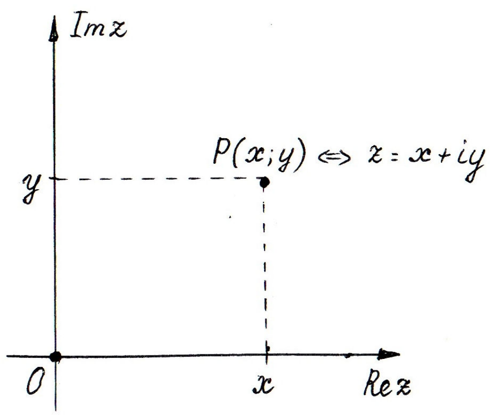


рис. 1.6.1. Геометрический смысл КЧ

Примечание:
Числа вида $z=x$ $(y\equiv 0)$ - действительные; изображаются на действительной оси.
Числа вида $z=iy$ $(x\equiv 0)$ - точками на мнимой оси.

7. Тригонометрическая форма КЧ.

Соединим начало координат с точкой P, изображающей комплексное число z (см. рис. 1.7.1).

Определение 3.

Модулем (r) комплексного числа называется длина вектора $\overrightarrow{OP}$: $r=|z|=\left|\overrightarrow{OP}\right|$

Обозначим φ угол между положительным направлением оси $0\boldsymbol{x}$ и вектором $\overrightarrow{OP}$.

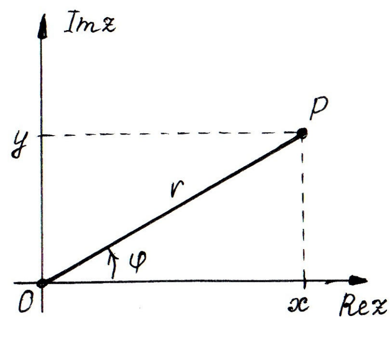


рис. 1.7.1.

Определение 4.

Угол φ называется **главным значением аргумента** комплексного числа $z\neq 0$ и обозначается $\varphi=\arg z$.

Очевидно, что $0\le r<+\infty$.

Для φ однозначно не определяется область изменения. Можно выбирать в зависимости от задачи $0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \le \pi$.

Аргументом *z* называется $Argz = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Из соотношений в прямоугольном треугольнике следуют связи[1]:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{2}$$

и наоборот:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{3}$$

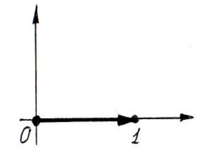
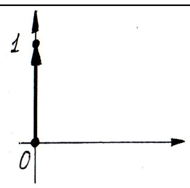
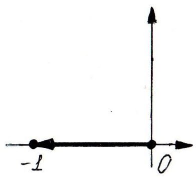
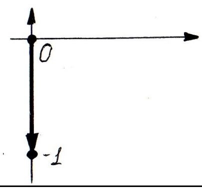
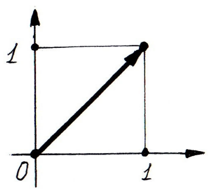
Подставим связь (2) в формулу (1). Получим $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi \quad \Rightarrow$

$$\boxed{z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} \tag{4}$$

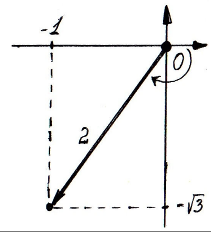
Определение 5.

Формула (4) носит название **тригонометрической формы комплексного числа.**

Примеры:

	Алгебраическая форма	Изображение	$r = \lvert z\rvert$	$\varphi = \arg z$	Тригонометрическая форма
1	$z = 1$		$\lvert z\rvert = 1$	$\varphi = 2\pi$	$z = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$
2	$z = i$		$\lvert z\rvert = 1$	$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$	$z = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$
3	$z = -1$		$\lvert z\rvert = 1$	$\varphi = \pi$	$z = \cos\pi + i\sin\pi$
4	$z = -i$		$\lvert z\rvert = 1$	$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\varphi = \dfrac{3\pi}{2}\right)$	$z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$
5	$z = 1 + i$		$\lvert z\rvert = \sqrt{2}$	$\varphi = \dfrac{\pi}{4}$	$z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

[1] Если $z \equiv 0$, то $\lvert z\rvert = 0$, а $\arg z$ - не определен.

6	$z=-1-i\sqrt{3}$		$\lvert z\rvert=2$	$\varphi=-\dfrac{2\pi}{3}$	$z=2\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$

8. Показательная форма комплексного числа.

$$\boxed{z=re^{i\varphi}} \tag{5}$$

$r=|z|;\quad \varphi=\arg z$

Возьмем два известных разложения:

$$\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\ldots$$

$$\sin\varphi=\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}+\ldots$$

Умножим $\sin\varphi$ на $\boldsymbol{i}$ и сложим:

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\ldots\right)+\left(i\varphi-\frac{i\varphi^3}{3!}+\frac{i\varphi^5}{5!}-\frac{i\varphi^7}{7!}+\ldots\right)=$$

$$=1+i\varphi+\frac{(i\varphi)^2}{2!}+\frac{(i\varphi)^3}{3!}+\frac{(i\varphi)^4}{4!}+\frac{(i\varphi)^5}{5!}+\frac{(i\varphi)^6}{6!}+\ldots=e^{i\varphi}\quad\Rightarrow\quad r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}$$

Это две разные формы записи одного и того же КЧ.

Определение 6.
Формула (5) носит название **показательной формы комплексного числа**.

Пример:

Рассмотрим число $i\sqrt{3}+1$. Запишем его всеми возможными способами.

$z=\left(1;\sqrt{3}\right)$ - по определению.

$z=1+i\sqrt{3}$ - алгебраическая форма;

$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ - тригонометрическая форма;

$z=2e^{\frac{\pi i}{3}}$ - показательная форма.

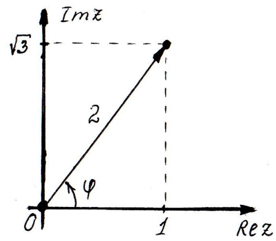


рис. 1.8.1.
Геометрическое представление числа $i\sqrt{3}+1$

9. Действия с комплексными числами, заданными в различных формах.

❖ Сложение и вычитание

$$z_1\pm z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

❖ Умножение

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1x_2+i\cdot y_1x_2+i\cdot y_2x_1+i^2y_1y_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

или

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

При умножении модули комплексных чисел перемножаются, а главные значения аргументов складываются.

❖ Возведение в степень

Из умножения в показательной форме следует:

$$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n} = \underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n}\cdot e^{i\overbrace{(\varphi+\varphi+\ldots+\varphi)}^{n}} = r^n e^{in\varphi} = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

$$\boxed{z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)} \qquad (6)$$

Формула (6) – **формула Муавра-Лапласа** для возведения в степень.

❖ Операция сопряжения

Число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным к числу $z = x + iy$. На плоскости $\mathbb{C}$ они обозначаются векторами, симметричными относительно действительной оси:

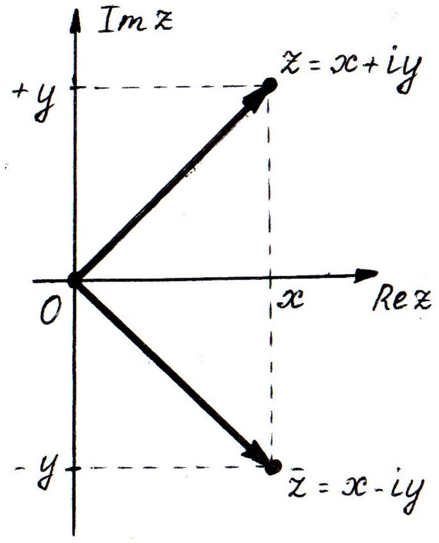


рис. 1.9.1. Обозначение сопряженной пары на плоскости $\mathbb{C}$

$\begin{matrix}(x;y)\\(x;-y)\end{matrix}$ - сопряженная пара

Свойства операции сопряжения:

$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$

$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\cdot\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$

- Деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

или:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

- Извлечение корня – формула Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}\quad, k = 0;1;\ldots;n-1.$$

$$\boxed{\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}} \qquad (7)$$

Доказательство:

Возведем обе части формулы (7) в степень ***n*** по формуле[2] (6). Получим:

$$z = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}n} = re^{i(\varphi+2\pi k)} = r\left(\cos(\varphi+2\pi k)+i\sin(\varphi+2\pi k)\right) = 2\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right) \Rightarrow z\equiv z$$

Ч.т.д.

[2] При извлечении корня n-ой степени получится ровно n чисел, лежащих на одной окружности $R = \sqrt[n]{r}$ и они делят эту окружность на n дуг равной длины.

Примеры:

1. Представить число, сопряженное с $z=1+i$ в тригонометрической форме и изобразить на плоскости.

$z=1+i \quad \Rightarrow \quad \bar{z}=1-i$

$\varphi=-\dfrac{\pi}{4}, \quad r=\sqrt{2}$

$\bar{z}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\pi/4\right)+i\sin\left(-\pi/4\right)\right)$

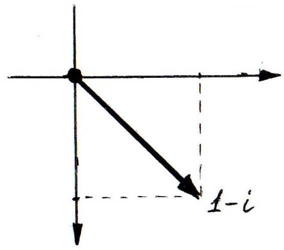


рис. 1.9.2.
для примера 1

2. В какой четверти лежит точка, соответствующая частному $\dfrac{1-i}{i-2}$?

$$\frac{1-i}{i-2}=\frac{(1-i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=\frac{-2+2i-i-1}{5}=\frac{-3+i}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

$\operatorname{Re} z<0; \quad \operatorname{Im} z>0 \quad \Rightarrow \quad$ *II четверть*

3. Решить уравнение и изобразить решения на комплексной плоскости: $z^4+4=0$

$$z^4=-4 \quad \Rightarrow \quad z=\sqrt[4]{-4}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), k=0,1,2,3.$$

$$z_1=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\overline{z_4}=-z_3$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\overline{z_3}=-z_4$$

$$z_3=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\overline{z_2}=-z_1$$

$$z_4=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\overline{z_1}=-z_2$$

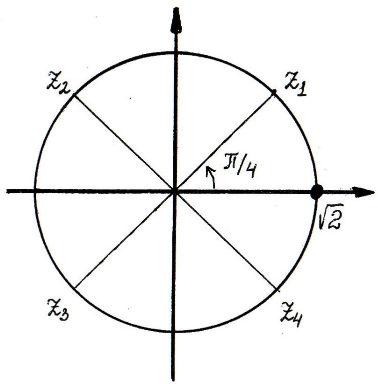


рис. 1.9.3.
для примера 3

2. Задание областей на комплексной плоскости.

Геометрический смысл модуля комплексного числа – расстояние до начала координат. Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел – расстояние между точками, изображающими эти числа (см. рис. 2.1).

Отсюда следует, что окружность можно задать уравнением

$$|z-z_0|=R>0 \tag{8}$$

(см. рис. 2.2)

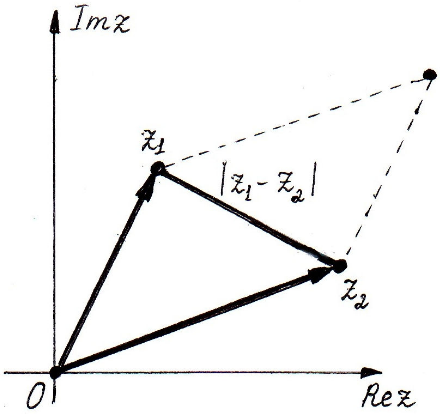


рис. 2.1. Геометрический смысл модуля разности двух КЧ

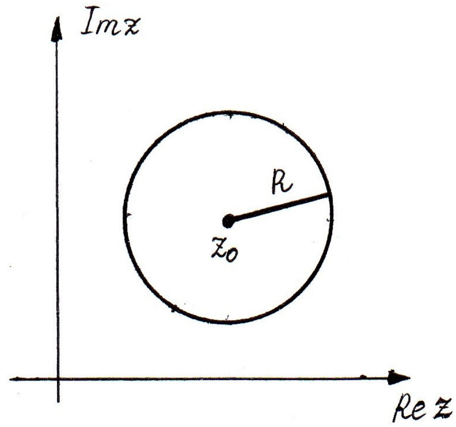


рис.2.2.

<u>Примеры:</u>

$|z|=1$ - см. рис. 2.3

$|z-1|=1$ - см. рис. 2.4

$|z-i|=1$ - см. рис. 2.5

$|z-1-i|=\sqrt{2}$ - см. рис. 2.6

$|z-1-i|=1$ - см. рис. 2.7

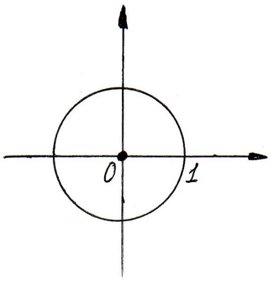


рис. 2.3

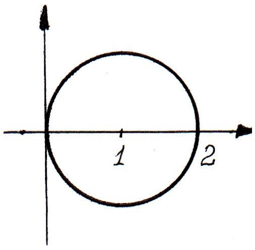


рис. 2.4

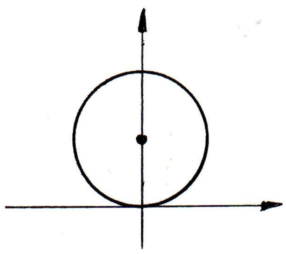


рис. 2.5

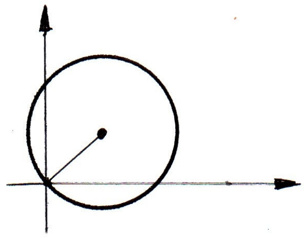


рис. 2.6

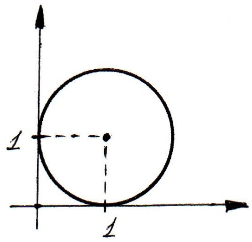


рис. 2.7

Если вместо знака «=» в (8) поставить неравенство, то это геометрически будет соответствовать заданию следующих множеств:

$|z-z_0|\le R$ - круг (см. рис. 2.8)

$|z-z_0|<R$ - открытый круг (см. рис. 2.9)

$|z-z_0|>R$ - внешность открытого круга (см. рис. 2.10)

$|z-z_0|\ge R$ - внешность круга (см. рис. 2.11)

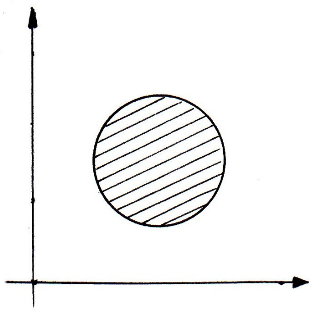


рис. 2.8

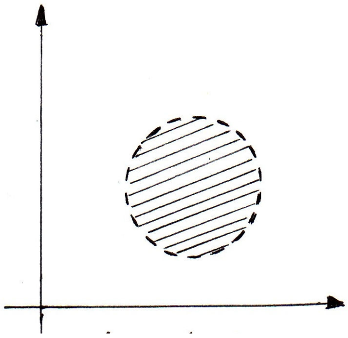


рис. 2.9

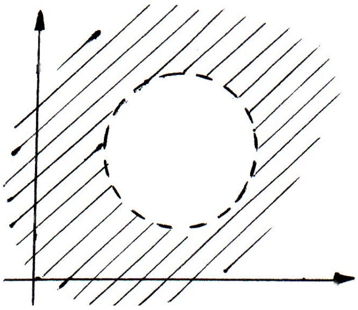


рис. 2.10

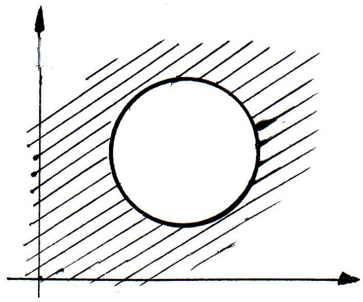


рис. 2.11

Геометрический смысл равенства $\arg z=\varphi_0$ - луч . (9)
(см. рис. 2.12)

Неравенства типа $\alpha\le\arg z<\beta$ задают сектор на плоскости (с границей, если неравенство нестрогое, и без границы, если строгое) – см. рис. 2.13.

Система неравенств соответствует пересечению множеств.

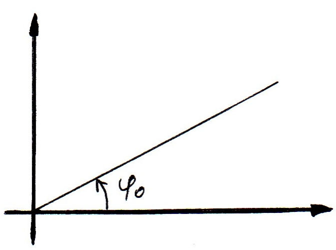


рис. 2.12

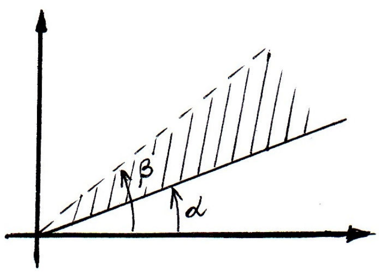


рис. 2.13

Пример:

$$D:\begin{cases}1 \le |z-i| \le 2 & - \textit{кольцо}\\ 0 \le \arg z \le \dfrac{3\pi}{4} & - \textit{сектор}\end{cases}$$

Все границы включены – см. рис. 2.14.

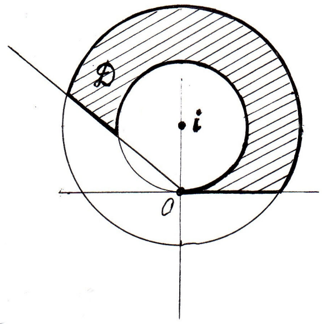


рис. 2.14

Более обширный обзор различных областей – на практических занятиях.

3. Расширенная комплексная плоскость.

Для нужд теории функций комплексного переменного, комплексную плоскость[3] $\mathbb{C}$ дополняют бесконечно удаленной точкой, соответствующей условному комплексному числу $z=\infty$. Для наглядного изображения расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\infty$, проведем специальное геометрическое построение (см. рис. 3.1).

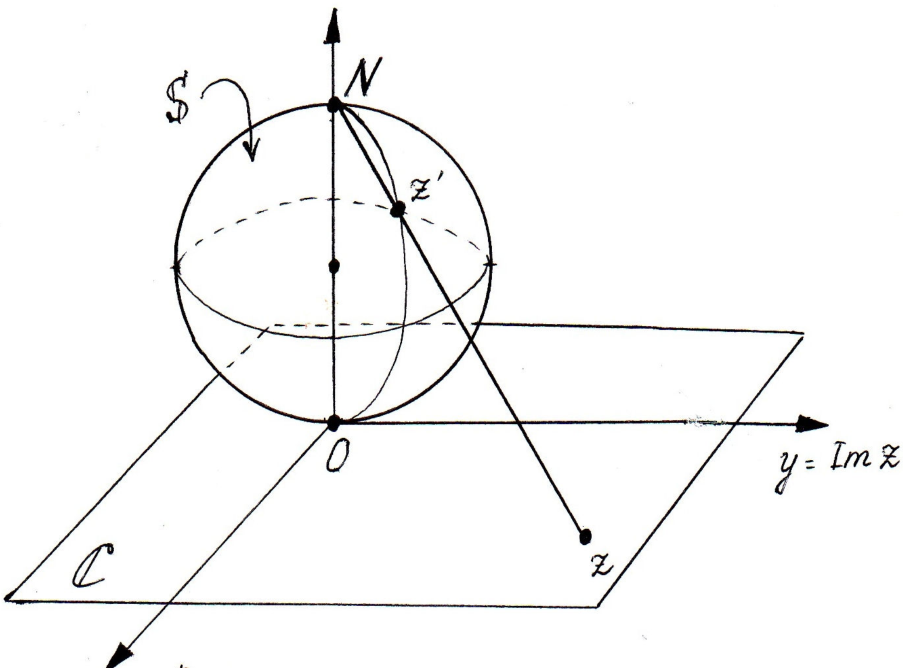


рис. 3.1

$z \leftrightarrow z'$ (взаимно-однозначное соответствие)

Условимся, что $z=\infty \leftrightarrow N$. Тогда между точками сферы и точками $\mathbb{C}$ - взаимно однозначное соответствие. Это соответствие называется **стереографической проекцией**.

Сфера S называется **сферой Римана**.

[3] На действительной числовой прямой две бесконечно удаленных точки $x \to +\infty$; $x \to -\infty$. На комплексной плоскости – одна!

4. Понятие функции комплексного переменного.

Если $\forall z \in D \subset \mathbb{C}$ поставлено в соответствие одно (или несколько) чисел $w \in G$, то на D определена функция комплексного переменного $w = f(z)$ - однозначная (или многозначная) – см. рис. 4.1.

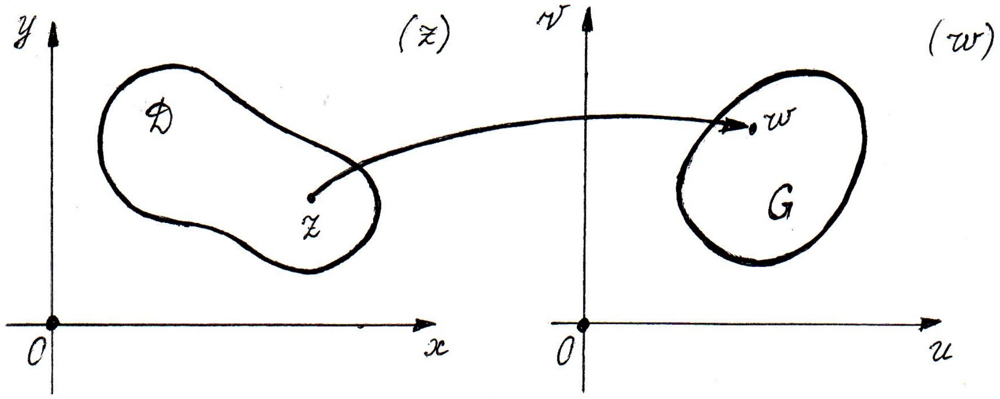


рис. 4.1

Примеры:

$w = z^2 = (x+iy)^2$ - однозначная

$w = \sqrt[4]{z}$ - многозначная

Значение функции представимо в виде

$w = u + iv \Rightarrow f(z) = u + iv$, но $z = x + iy \quad \Rightarrow \quad f(x+iy) = u + iv \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} u = u(x;y) = \operatorname{Re} f(z) \\ v = v(x;y) = \operatorname{Im} f(z) \end{matrix}$

Определение 7.

Функции двух действительных переменных $U(x;y); V(x;y)$ называются **действительной и мнимой частью функции** $w = f(z)$.

Пример:

$$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xiy - y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \operatorname{Re}(z^2) = U(x;y) = x^2 - y^2 \\ \operatorname{Im}(z^2) = V(x;y) = 2xy \end{matrix}$$

Основные классы функций комплексного переменного:

1) линейная функция: $\boxed{w = a \cdot z + b}$, где **z** – комплексная переменная; $a, b \in \mathbb{C}$.

Пример:

$w = i \cdot z$

2) дробно-линейная: $\boxed{w = \dfrac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}}$, где **z** – комплексная переменная; $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Пример:

$w = \dfrac{1}{z}$

3) рациональная: $\boxed{w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n}$, где $a_i \in \mathbb{C}$.

Пример:

$w = 8iz^3 - 3z^2 + (2+i)z - 3$

4) дробно-рациональная: $\boxed{w = \dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}}$, где $P(z), Q(z)$ - многочлены вида 3.

Пример:

$$w = \frac{z^2}{z^2+4}$$

5) показательная: $\boxed{w = e^z}$

Определения: $e^z = e^{x+iy} = e^{x(\cos y + i\sin y)}$ или $e^z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, |z| < +\infty$.

Пример:

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{0+\frac{\pi}{2}i} = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i$$

6) тригонометрические функции:

$w = \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ или $w = \sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; |z| < +\infty$

$w = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$ или $w = \cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}; |z| < +\infty$

$w = \operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}; \quad w = \operatorname{ctg} z = \dfrac{1}{\operatorname{tg} z}$

7) гиперболические функции:

$\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \dfrac{1}{\operatorname{th} z}$

8) логарифмическая функция: $\boxed{\ln z = \ln|z| + i \cdot \operatorname{a rg} z} = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\ln z = \ln|z| + i \cdot \operatorname{a rg} z$ - **главное значение логарифма**.

Пример:

$$\ln(-1) = \ln|-1| + i(\arg(-1)) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = \pi i(2k+1); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

9) сложная показательно-степенная функция: $w = f(z) = [u(z)]^{v(z)} = e^{\ln u^v} = e^{v(z)\ln u(z)}$

Пример:

$$i^i = e^{\ln i^i} = e^{i \ln i} = e^{i(\ln|i| + i\arg i)} = e^{i \cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Дифференцирование функций комплексного переменного.

1. Приращение функции комплексного переменного.

Пусть $z = x + iy$ - комплексное переменное, а $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ - его приращение (Δx и Δy - приращения действительной и мнимой частей z соответственно).

Тогда $z + \Delta z = (x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$. Пусть $f(z)$ – функция, определенная в точке z и достаточно большой ее окрестности. Назовем **приращением этой функции в точке *z*** величину $\Delta f(z)$:

$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z)$ или

$$\Delta f(z) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + i \cdot v(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - i \cdot v(x, y) =$$
$$= \left[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \right] + i \left[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) \right] =$$
$$= \Delta u(x, y) + i \cdot \Delta v(x, y)$$

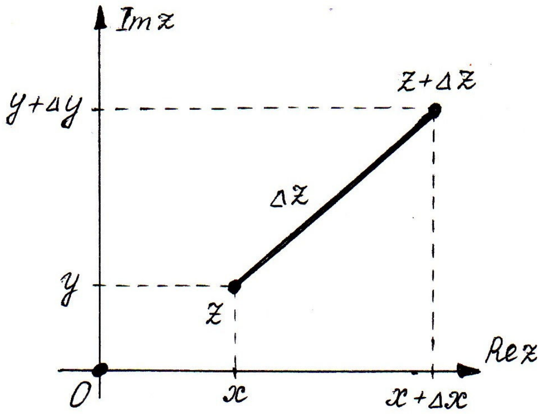


рис. 1.1

2. Предел и непрерывность комплексной функции.

1. Определение предела комплексной функции.

Пусть функция $f(z)$ определена в $\overset{0}{\mathrm{U}}(z_0)$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$.

Определение 1.

Число $A \in \overline{\mathbb{C}}$ называют **пределом функции *f*(*z*)** комплексного переменного z в точке $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ и обозначают $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ (или $f(z) \to A$ при $z \to z_0$), если для

$$\forall \mathrm{U}(A)\ \exists \overset{0}{\mathrm{V}}(z_0):\ \forall z \in \overset{0}{\mathrm{V}}(z_0) \ \Rightarrow\ f(z) \in \mathrm{U}(A).$$

Если оба числа $z_0, A \in \mathbb{C}$ (т.е. не равны бесконечности), то это определение можно переписать на языке неравенств так:

Определение 2.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall z, 0 < |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z) - A| < \varepsilon$$

В случаях

$z_0 = \infty, A \neq \infty$; $z_0 \neq \infty, A = \infty$; $z_0 = \infty, A = \infty$ нам понадобится пояснить понятие «окрестность точки **∞**».⊠

На сфере Римана точке $z = \infty$ соответствует точка N. Следовательно, окрестности точки N будет соответствовать на плоскости окрестность $z = \infty$. Если границе окрестности точки N соответствует окружность $|z| = R$ на плоскости, то самой окрестности точки N будет соответствовать область <u>вне</u> этой окружности: $|z| > R$ (см. рис. 2.1.1).

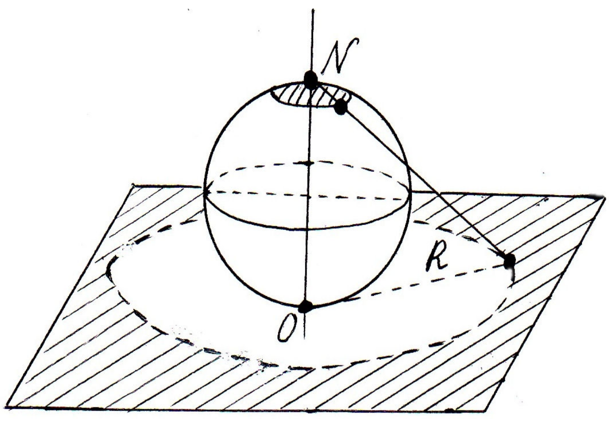


рис. 2.1.1

Определение 3.

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists R(\varepsilon)>0: \quad \forall z, |z|>R \quad \Rightarrow \quad |f(z)-A|<\varepsilon$$

Определение 4.

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall R>0 \ \exists\delta(R)>0: \quad \forall z, 0<|z-z_0|<\delta(R) \quad \Rightarrow \quad |f(z)|>R$$

Определение 5.

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall R>0 \ \exists r(R)>0: \quad \forall z, |z|>r \quad \Rightarrow \quad |f(z)|>R$$

Утверждение:

$$\exists \lim_{\substack{z\to z_0\\(z_0=x_0+iy_0)}} f(z)=A=A_1+i\cdot A_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \operatorname{Re} f(z)=A_1\\ \exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \operatorname{Im} f(z)=A_2\end{cases}$$

2. Определение непрерывности комплексной функции.
Определение 6 (непрерывность функции в точке).

Функция $f(z)$ **непрерывна в точке z_0**, если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta(\varepsilon)>0: \quad \forall z, 0<|z-z_0|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$, то есть если функция $f(z)$ определена в окрестности точки z_0 и в ней самой, и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Второе определение непрерывности:

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta f(z)=0$, т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Функция **непрерывна в области D**, если она непрерывна в $\forall z\in D$.

Теоремы об арифметических свойствах пределов остаются справедливы для функций комплексного переменного, а, следовательно, и арифметические свойства непрерывных функций.

Например, $f_1(z)\pm f_2(z)$; $f_1(z)\cdot f_2(z)$; $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ $\left(f_2(z_0)\neq 0\right)$ - непрерывны в $z=z_0$, если в $z=z_0$ непрерывны функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$.

Утверждение:

Функция $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ непрерывна в $z_0=x_0+iy_0$ $\Leftrightarrow$ функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке $M_0(x_0,y_0)$.

3. Геометрический смысл непрерывности.

Окрестность точки z_0 отображается функцией $f(z)$ в окрестность точки $w_0=f(z_0)$:

$\mathrm{U}(\delta,z_0)\xrightarrow{f(z)}\mathrm{V}(\varepsilon,w_0)$
(см. рис. 2.3.1)

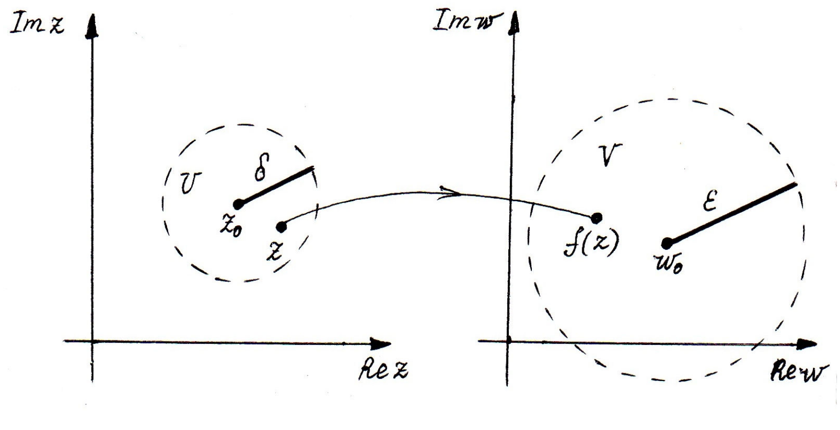


рис. 2.3.1

3. Дифференциал функции комплексного переменного.

1. Функция $w = f(z)$ называется **дифференцируемой в точке** *z*, если ее приращение в этой точке имеет вид: $\Delta f(z) = f\left(z+\Delta z\right) - f\left(z\right) = A\Delta z + \overline{o}\left(\Delta z\right)$, где ***A*** **–** комплексное число, не зависит от Δz, а может зависеть только от точки *z*.

$A\Delta z$ - главная линейная часть приращения – называется **дифференциалом** функции *f*(*z*) и обозначается $df(z)$:

$$\boxed{df(z) = A\Delta z}$$

2. Производной функции комплексного переменного в точке *z* называется

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{A\Delta z + \overline{o}(\Delta z)}{\Delta z} = \underbrace{\lim_{\Delta z\to 0}\frac{A\Delta z}{\Delta z}}_{=A} + \underbrace{\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{o}(\Delta z)}{\Delta z}}_{\substack{=0 \text{ по определению} \\ \text{бесконечно малой} \\ \text{более высокого} \\ \text{порядка, чем } \Delta z}} = A.$$ Следовательно,

$$\boxed{df(z) = f'(z)dz}, \text{ т.к. } f'(z) = A.$$

4. Условия дифференцируемости.

1. Теорема о необходимом условии дифференцируемости.

Если функция *f*(*z*) дифференцируема в точке $z = x + iy$ (а, следовательно, существует конечная производная в этой точке), то функции $u\left(x,y\right) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v\left(x,y\right) = \operatorname{Im} f(z)$ являются дифференцируемыми в точке (*x*, *y*) и в этой точке выполняются равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Доказательство:

Функция *f*(*z*) дифференцируема в точке *z*, следовательно, $\exists f'(z)$, т.е.

$\exists \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{A\Delta z + \overline{o}\left(\Delta z\right)}{\Delta z}$, причем $\Delta z = \Delta x + i\cdot\Delta y \to 0$ по любому пути.

Пусть $z + \Delta z \to z$ по прямой, параллельной оси 0*x*, т.е. $\Delta y = 0$ и $\Delta z = \Delta x \to 0$. Тогда:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\left(x+\Delta x, y\right) + i\cdot v\left(x+\Delta x, y\right) - u\left(x,y\right) - i\cdot v\left(x,y\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\left(x+\Delta x, y\right) - u\left(x,y\right)}{\Delta x} + i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\left(x+\Delta x, y\right) - v\left(x,y\right)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

С другой стороны, если $z + \Delta z \to z$ по прямой, параллельной оси 0*y*, т.е. $\Delta x = 0,\ \Delta z = i\cdot\Delta y \to 0 \quad\Leftrightarrow\quad \Delta y \to 0$, то:

$$f'(z) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u\left(x, y+\Delta y\right) + i\cdot v\left(x, y+\Delta y\right) - u\left(x,y\right) - i\cdot v\left(x,y\right)}{i\cdot\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u\left(x, y+\Delta y\right) - u\left(x,y\right)}{i\cdot\Delta y} + i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v\left(x, y+\Delta y\right) - v\left(x,y\right)}{i\cdot\Delta y} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Сравнивая полученные результаты, получим:

$$\underline{\frac{\partial u}{\partial x}} + i\underline{\underline{\frac{\partial v}{\partial x}}} = \underline{\frac{\partial v}{\partial y}} - i\underline{\underline{\frac{\partial u}{\partial y}}} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$ - эти условия называются **условиями Коши – Римана.**

Ч.т.д.

Замечание:

Производную можно вычислять любым из способов:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Достаточно запомнить одну из формул.

Примеры:

Проверить выполнение условий Коши-Римана и найти производную для функций

а) $w=z^2$

б) $w=\operatorname{ch} z$

а) $w=z^2=(x+iy)^2=x^2+2x\cdot iy+(iy)^2=x^2-y^2+i2xy$

$u(x,y)=x^2-y^2;\quad v(x,y)=2xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^2-y^2\right)_x'=2x;\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\left(2xy\right)_y'=2x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^2-y^2\right)_y'=-2y;\quad -\frac{\partial v}{\partial x}=-\left(2xy\right)_x'=-2y;$$

Следовательно, условия Коши-Римана выполнены.

$$f'(z)=\left(z^2\right)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+i(2y)=2(x+iy)=2z$$

б) $w=\operatorname{ch} z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}=\dfrac{e^x\cos y+ie^x\sin y+e^{-x}\cos y-ie^{-x}\sin y}{2}=$

$$=\cos y\frac{e^x+e^{-x}}{2}+i\sin y\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\cos y\operatorname{ch} x+i\sin y\operatorname{sh} x$$

$u(x,y)=\cos y\operatorname{ch} x;\quad v(x,y)=\sin y\operatorname{sh} x$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\cos y\operatorname{ch} x\right)_x'=\cos y\operatorname{sh} x;\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\left(\sin y\operatorname{sh} x\right)_y'=\cos y\operatorname{sh} x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\cos y\operatorname{ch} x\right)_y'=-\sin y\operatorname{ch} x;\quad -\frac{\partial v}{\partial x}=-\left(\sin y\operatorname{sh} x\right)_x'=-\sin y\operatorname{ch} x$$

Следовательно, условия Коши-Римана выполнены.

$$f'(z)=\left(\operatorname{ch} z\right)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\cos y\operatorname{sh} x+i\sin y\operatorname{ch} x=\cos y\frac{e^x-e^{-x}}{2}+i\sin y\frac{e^x+e^{-x}}{2}=$$

$$\frac{e^x\left(\cos y+i\sin y\right)+e^{-x}\left(-\cos y+i\sin y\right)}{2}=\frac{e^x\left(\cos y+i\sin y\right)-e^{-x}\left(\cos(-y)+i\sin(-y)\right)}{2}=$$

$$=\frac{e^{x+iy}-e^{-x-iy}}{2}=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\operatorname{sh} z$$

Приведенные примеры иллюстрируют факт, что таблица производных и правила дифференцирования сохраняются.

2. Теорема о достаточном условии дифференцирования.

Если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y) и в этой точке выполнены условия Коши-Римана, то функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ комплексного переменного $z=x+iy$ дифференцируема в точке z и имеет производную, которая вычисляется по одной из формул:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Доказательство:

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ - дифференцируемые, следовательно:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(\rho),$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |\Delta z|$

$\alpha(\rho),\ \beta(\rho)$ - б.м. при $\rho \to 0$, причем $\alpha = \overline{o}(\rho), \beta = \overline{o}(\rho)$.

$$\Delta f(z) = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(\rho) + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + i\beta(\rho).$$

По условию Коши-Римана, заменим $\frac{\partial u}{\partial y}$ на $-\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\Delta f(z) = \underline{\frac{\partial u}{\partial x}}\Delta x - \underline{\underline{\frac{\partial v}{\partial x}}}\Delta y + \alpha(\rho) + i\underline{\underline{\frac{\partial v}{\partial x}}}\Delta x + i\underline{\frac{\partial u}{\partial x}}\Delta y + i\beta(\rho) = \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\cdot\Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x}(i\cdot\Delta x - \Delta y) + \alpha(\rho) + i\beta(\rho) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\cdot\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\cdot\Delta y) + \alpha(\rho) + i\beta(\rho) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta z + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta z + \alpha(\rho) + i\beta(\rho) = A\Delta z + \overline{o}(|\Delta z|)$$

т.е. функция ***f***(***z***) – дифференцируема.

По определению производной:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \underbrace{\frac{\alpha + i\beta}{\rho}}_{=0}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ч.т.д.

3. Критерий дифференцируемости.

Опираясь на две доказанные теоремы, можно сформулировать критерий дифференцируемости:

Теорема.

Для того чтобы функция $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в (x,y);

2) в точке (x,y) выполнялись условия Коши-Римана: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$.

5. Регулярные функции.

Функция ***f***(***z***), определенная в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, называется **регулярной** в этой точке (**аналитической, голоморфной**), если ***f***(***z***) дифференцируема в некоторой окрестности $\mathrm{U}(z_0)$, в том числе - в самой точке z_0.

Функция ***f***(***z***), регулярная в $\forall z \in D \subset \mathbb{C}$, называется **регулярной в этой области**.

Пример:

Проверить на регулярность функцию $w = z \cdot \overline{z}$.

$w = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = x^2 + y^2; \quad v(x,y) = 0$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

Следовательно, условия Коши-Римана выполнены при $x = 0,\ y = 0$, т.е. только в точке $z = 0$.

Следовательно, функция $w = z \cdot \overline{z}$ дифференцируема только в одной точке $z = 0$, причем $w'(0) = 0 + i \cdot 0 = 0$, но не регулярна ни в одной точке комплексной плоскости.

6. Связь регулярных функций комплексного переменного и гармонических функций.

Функция $\varphi(x,y)$ называется **гармонической**, если она удовлетворяет уравнению Лапласа: $\boxed{\Delta\varphi = 0}$ или $\boxed{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0}$.

Теорема 1.

Если функция $f(z)$ – регулярна в z, то ее действительная и мнимая части $u = \operatorname{Re} f(z)$ и $v = \operatorname{Im} f(z)$ - функции гармонические.

Доказательство:

Функция $f(z)$ – регулярна, следовательно, выполняются условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & (2) \end{cases}$$

Продифференцируем (1) по x, а (2) по y и сложим:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta u = 0$$

Следовательно, u – гармоническая.

Продифференцируем (1) по y, а (2) по x и вычтем:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta v = 0$$

Следовательно, v – гармоническая.

Ч.т.д.

Верна и обратная

Теорема 2.

Если две функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются гармонически-сопряженными, т.е. $\Delta u = 0$ и $\Delta v = 0$, и для этой пары выполнены условия Коши-Римана, то они определяют регулярную функцию $f(z)$ (с точностью до константы).

Пример:

Может ли функция $u = ax^2 + 4y^2$ являться действительной частью некоторой регулярной функции? Если да, то восстановить ее.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 8y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8 \quad \Rightarrow \quad 2a + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -4$$

Да, может, при условии $a = -4$.

$u = -4x^2 + 4y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -8x \quad \Rightarrow \quad v = \int (-8x)\, dy = -8xy + C(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -8y + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad -8y + C'(x) = -8y \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \text{const}$$

Следовательно,

$$f(z) = u + iv = -4x^2 + 4y^2 + (-8xy + C)i = -4\left(x^2 + 2x \cdot iy - y^2\right) + Ci = -4(x + iy)^2 + Ci = -4z^2 + Ci$$

Регулярная функция может быть восстановлена по своей действительной или мнимой части с точностью до константы.

Конформные отображения.

1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной регулярной функции.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \quad (\varphi_1 = \arg z_1);$
$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \quad (\varphi_2 = \arg z_2)$ $\Rightarrow \quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \left(\text{т.е. } \arg \dfrac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2\right)$

$\Rightarrow \boxed{\arg \dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2}$

Рассмотрим функцию $f(z) = w$:

-дифференцируемая в области Д;

- $w_0 = f(z_0);\ f'(z_0) = |f'(z_0)| e^{i \arg f'(z_0)} \neq 0$

- отображает кривую γ, проходящую через z_0 в кривую Г, проходящую через w_0.

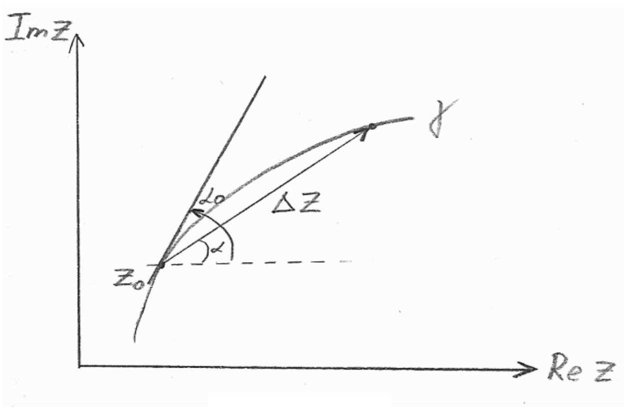


рис. 1.1

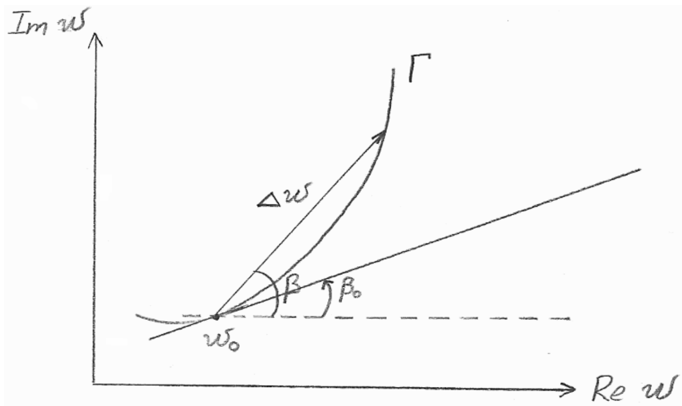


рис. 1.2

По определению производной $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$

$$\Rightarrow \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left[\arg \Delta w - \arg \Delta z\right] = \lim_{\Delta z \to 0} (\beta - \alpha) = \beta_0 - \alpha_0 \Rightarrow \arg f'(z_0) = \beta_0 - \alpha_0$$

$\Rightarrow \boxed{\beta_0 = \alpha_0 + \arg f'(z_0)}$

Итак, γ (прообраз) наклонен в точке z_0 под углом α_0 к оси $\operatorname{Re} z$; Г(образ) наклонен в точке w_0 под углом $\beta_0 = \alpha_0 + \arg f'(z_0)$ к оси $\operatorname{Re} w$, следовательно, образ повернулся на угол $\arg f'(z_0)$, т.е. <u>геометрический смысл аргумента производной – угол поворота кривой в точке</u> w_0.

Рассмотрим теперь число $k = |f'(z_0)|$:

$k = |f'(z_0)| = \lim\limits_{\Delta z \to \infty} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \Rightarrow \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k + \bar{o}(\Delta z) \Rightarrow |\Delta w| = k|\Delta z| + \bar{o}(\Delta z)\Delta z$. Здесь $|\Delta z|, |\Delta w|$ - длины отрезков. Если взять окружность:

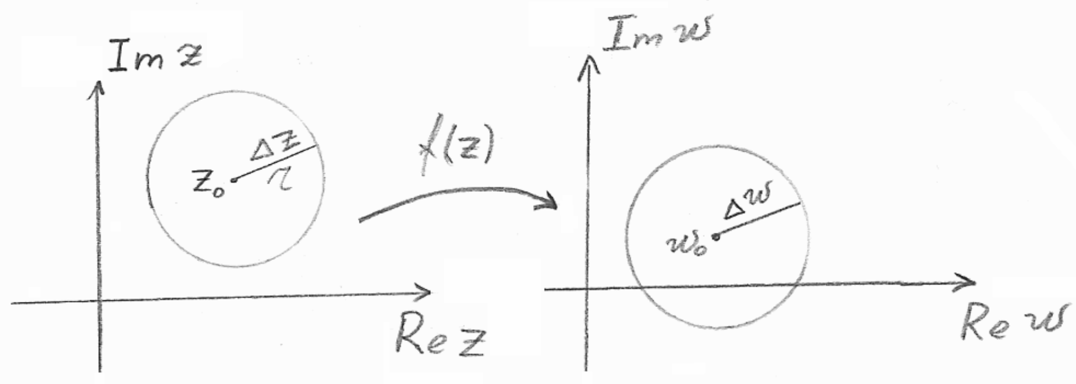


рис. 1.3

$|\Delta z| = r$, то под действием $w = f(z)$ она перейдет в окружность
$|\Delta w| \cong k|\Delta z| = kr$ при $\Delta z \to 0$.

Следовательно, k – коэффициент растяжения, не зависящий от направления луча, выходящего из z_0.

Пример 1.

Найти угол поворота θ лучей и коэффициент искажения длин k в точке $z_0 = 1+i$ под действием отображения $w = z^2$.

$w' = 2z \Rightarrow w'(z_0) = 2+2i \Rightarrow k = |w'(z_0)| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} > 1$ (растяжение)

$\theta = \arg w'(z_0) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4} > 0$ (против часовой стрелки)

Пример 2.

Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается при заданном отображении?

а) $w = z^2 + 2z + i$

$w' = 2z + 2$

$|w'| = 2|z+1|$

граница областей

$|w'| = 1 \Rightarrow |z+1| = \dfrac{1}{2}$

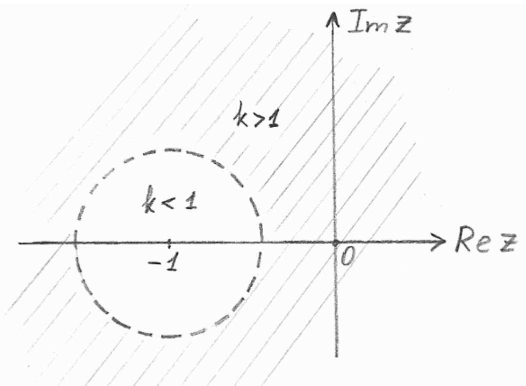


рис. 1.4

$|z+1| > \dfrac{1}{2}$ ($k > 1$ – растяжение)

$|z+1| < \dfrac{1}{2}$ ($k < 1$ – сжатие)

б) $w = \dfrac{1}{z-i}$

$w' = -\dfrac{1}{(z-i)^2}$

$|w'| = \dfrac{1}{|z-i|^2}$

граница $|w'| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z-i|^2 = 1 \Rightarrow |z-i| = 1$

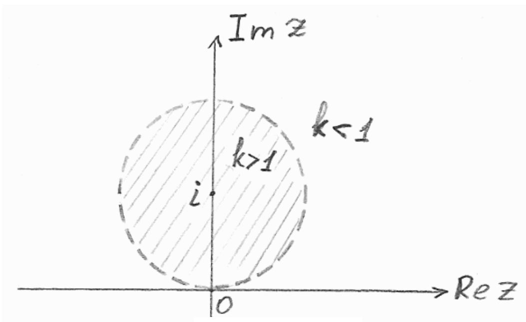


рис. 1.5

$|z-i| > 1$ ($k < 1$ – сжатие)

$|z-i| < 1$ ($k > 1$ – растяжение)

2. Понятие о конформном отображении.

Пусть $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0.

Определение: Отображение $w = f(z)$ называется **конформным** в точке z_0, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими через точку, и имеет постоянство растяжения в точке z_0.

Свойство консерватизма углов заключается в следующем:

Пусть кривые γ_1 и γ_2, выходящие из z_0, перешли в кривые Γ_1 и Γ_2, выходящие из $w_0 = f(z_0)$:

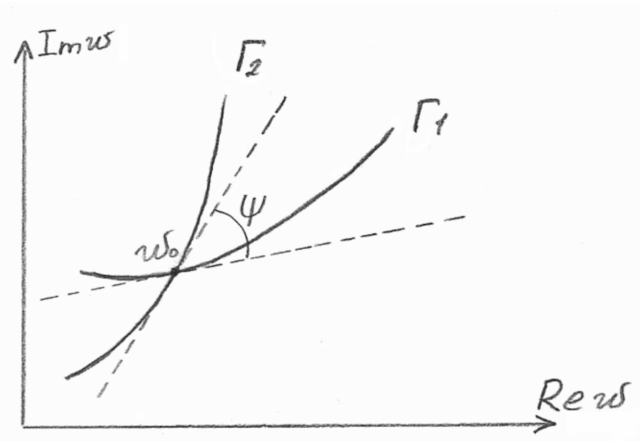


рис. 2.1

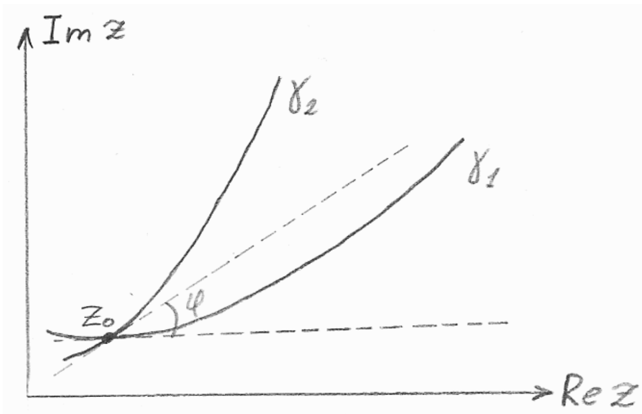


рис. 2.2

φ - угол между γ_1 и γ_2 в точке z_0, а

ψ - угол между Γ_1 и Γ_2 в точке w_0.

Следовательно, консерватизм углов означает, что $\boxed{\varphi = \psi}$

(причем относительно действительной оси этот угол повернулся на $\arg f'(z_0)$)

Свойство постоянства растяжения:

Если γ - кривая, соединяющая z_0 и z, перешла в Г – кривую, соединяющую w_0 и w, то коэффициент искажения длин

$k = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\text{длина } \Gamma}{\text{длина } \gamma}$. Для регулярной функции $k = |f'(z_0)|$ и при $|f'(z_0)| \neq 0$ не зависит от направления исходной кривой γ.

Таким образом, верна следующая Теорема:

Теорема. Если $w = f(z)$ дифференцируема в окрестности точки z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то отображение, осуществляемое функцией $w = f(z)$, конформно в точке z_0.

Рассмотрим расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$.

Определение: $w = f(z)$ конформно в $z = \infty$, если функция $w = f\left(\dfrac{1}{z}\right) = F(z)$ отображает $z = 0$ конформно в плоскость W.

Пример:

$w = f(z) = 2 + \frac{i}{z}$

$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = 2 + i \cdot \frac{1}{z} = 2 + i\xi$ – линейная, регулярная

$\mathrm{F}'(\xi) = i \neq 0$ в точке $\xi = 0$

$F(0) = 2$

$\Rightarrow F(z)$ конформно отображает 0 в 2

$\Rightarrow f(z)$ конформно отображает ∞ в 2.

Определение: $w = f(z)$ отображает $z = z_0$ конформно в $w = \infty$, если $w = \frac{1}{f(z)}$ конформно отображает $z = z_0$ в $w = 0$.

Пример 1:

$w = \frac{1}{z - i}, \quad z_0 = i$

$w = \frac{1}{1/z - i} = z - i$. Точка $z_0 = i$ переходит в $w = 0$

$w' = 1 \neq 0 \Rightarrow z_0 = i$ отображается в $w = \infty$ конформно.

Пример 2:

В каких точках нарушается конформность отображения $w = z^3 - 6z^2 + 9z - 3$?

w – регулярна везде.

$w' = 3z^2 - 12z + 9$

$w' = 0 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 1;\ z_2 = 3$

Конформность нарушается в z_1 и z_2.

3. Примеры конформных отображений.

Определение: Функция называется однолистной на множестве Д, если отображение $w = f(z)$ - взаимнооднозначное.

Примеры:

1) $w = az + b \Rightarrow z = \frac{w - b}{a}$ однозначна, следовательно, однолистна.

2) $w = z^2$ неоднозначна на всей плоскости, т.к., например, две точки ± 1 переходят в одну. Но на $Д: \operatorname{Im} z > 0$ (на верхней полуплоскости) $w = z^2$ является однолистной.

Определение: Отображение $w = f(z)$ называется **конформным в области Д**, если $f(z)$ однолистна в Д и конформна в любой точке этой области.

Линейная функция.

$\boxed{w = az + b}$ $(a, b \in \mathbb{C})$. Эта функция осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости $(\overline{\mathbb{C}})$ на расширенную комплексную плоскость.

Действительно,

$w = a(x+iy)+b = \underline{a_1 x} + a_2 ix + a_1 iy - \underline{a_2 y} + \underline{b_1} + ib_2 = \qquad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C})$

$= (\underbrace{a_1 x - a_2 y + b_1}_{u}) + i(\underbrace{a_2 x + a_1 y + b_2}_{v})$

$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = a_1 = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -a_2 = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ для $\forall x, y \Rightarrow w = az + b$ регулярна на всей комплексной плоскости

$w = az + b \Leftrightarrow z = \dfrac{w-b}{a}$ – соответствие взаимно-однозначное

следовательно, функция однолистная на всей плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

$w' = (az+b)' = a \neq 0 \Rightarrow$ конформно во всех точках.

$z = \infty \leftrightarrow w = \infty$

Геометрический смысл.

1) переносит начало координат $z = 0$ в точку $w = b$
2) поворачивает на угол $\varphi = \arg a$ (т.к. $\arg w' = \arg a$)
3) растягивает в $|a|$ (т.к. $|w'| = |a|$)

Пример 1:

Найти образ области Д при отображении $w = 2iz + 3$, если $Д: \begin{cases} |z| \le 2 \\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

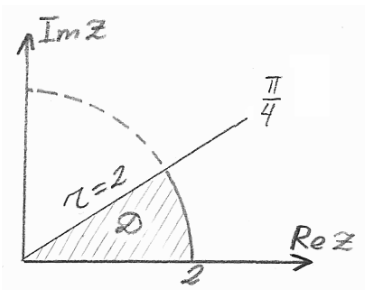


рис. 3.1

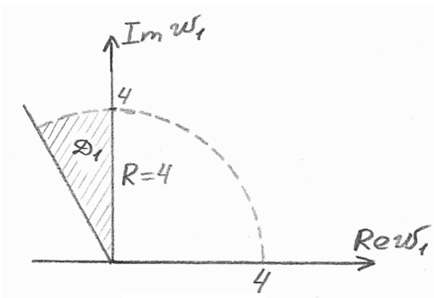


рис. 3.2

$w_1 = w_1' = 2i$

$k = |2i| = 2$

$\varphi = \arg 2i = \dfrac{\pi}{2}$

$w = w_1 + 3$

$Д \xrightarrow{w} G$

$G: \begin{cases} |w-3| \le 4 \\ \dfrac{\pi}{2} \le \arg(w-3) \le \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

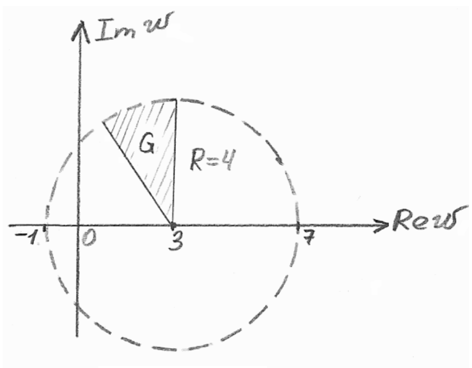


рис. 3.3

Пример 2:

Отобразить круг $|z - 2 + i| < 5$ (1)

в круг $|w| < 1$ (2).

Требуется найти отображение, переводящее (1) в (2)

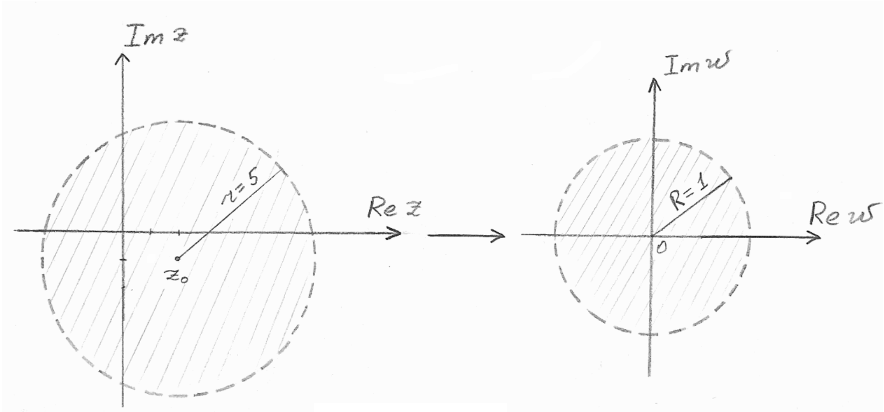


рис. 3.4

Т.к. $z_0 = 2 - i \to w_0 = 0$, то $w = a(z - 2 + i)$

Граница области переходит в границу образа, следовательно

$\underbrace{|w|}_{=1} = |a| \cdot \underbrace{|z - 2 + i|}_{=5} \Rightarrow 5|a| = 1 \Rightarrow |a| = \dfrac{1}{5}$

Возьмем $a = \dfrac{1}{5}$ ($\arg a = 0$, т.к. можно взять любое)

Итак, $w = \dfrac{1}{5}(z - 2 + i) = \dfrac{z}{5} + \dfrac{i-2}{5}$

<u>Степенная функция.</u>

$\boxed{w = z^n}$ $(n \in N)$

$w = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \underbrace{r^n \cos n\varphi}_{u} + i \underbrace{r^n \sin n\varphi}_{v}$

Воспользуемся условием Коши-Римана в полярных координатах:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases} \quad \text{(Докажите самостоятельно)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = nr^{n-1}\cos n\varphi \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \cdot r^n \cos n\varphi \cdot n$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = nr^{n-1}\sin n\varphi \qquad -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \cdot r^n \cdot (-\sin n\varphi) \cdot n$$

Условия Коши-Римана выполняются для $\forall \varphi$ и $\forall r \neq 0$, т.е. для $z \neq 0$.

Для $z = 0$ отдельно $\Rightarrow$ функция регулярна $\forall z$.

$w' = nz^{n-1} \neq 0$, если $z \neq 0$, следовательно, отображение конформно на всей плоскости кроме $z = 0$. Найдем область однолистности:

$z = re^{i\varphi} \to w = z^n = r^n e^{in\varphi}$, т.е. главное значение аргумента увеличивается в n раз. Если $\varphi = \dfrac{2\pi}{n}$, то $n\varphi = 2\pi$ (полный круг). Если φ - больше, то $n\varphi > 2\pi$, т.е. получится «наложение», нарушится однолистность. Следовательно, $w = z^n$ является однолистной в угле раствора $\dfrac{2\pi}{n}$.

$w = z^n$ конформно отображает угол раствора $\frac{2\pi}{n}$ на плоскость с разрезом.

<u>Пример 1:</u>

Найти образ области $Д: \operatorname{Im} z > 0$ под действием отображение $w = z^2$

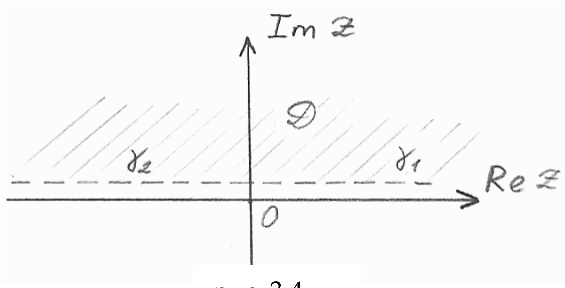


рис. 3.4

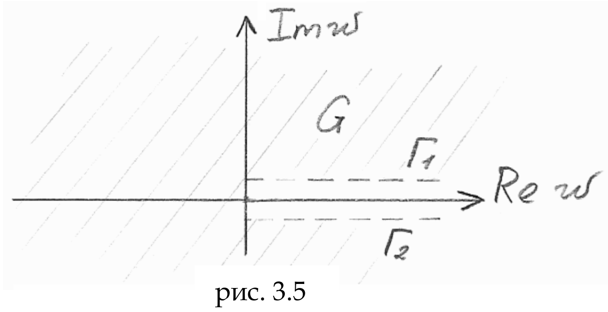


рис. 3.5

$\gamma_1 : \varphi = 0 \to \Gamma_1 : \psi = 0$

$\gamma_2 : \varphi = \pi \to \Gamma_2 : \psi = 2\pi$

Говорят, что степенная функция «разворачивает» углы.

<u>Пример 2:</u>

Найти образ области $Д_1 : \begin{cases} |z| \le R \quad (R = 2) \\ \alpha_1 \le \arg z < \alpha_2 \quad \left(\alpha_1 = \frac{\pi}{12}; \alpha_2 = \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

Под действием отображения $w = az^n + b \quad (a = 1 + i; b = -i; n = 3)$

$w_1 = z^3 \quad , \quad Д \to Д_1$

$w_2 = (1+i)w_1, \quad Д_1 \to Д_2 \qquad \Rightarrow Д \to G$

$w = w_2 - i \quad , \quad Д_2 \to G$

3.

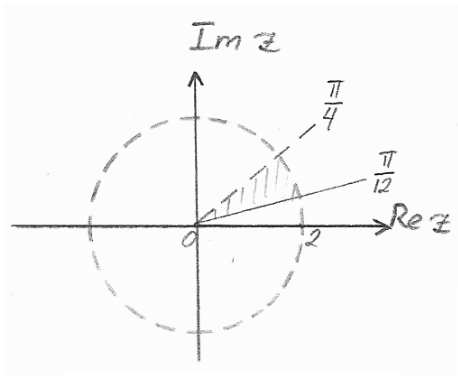


рис. 3.6. Область $Д$

$w_1 = z^3$

Модуль возводится в куб, аргумент умножается на

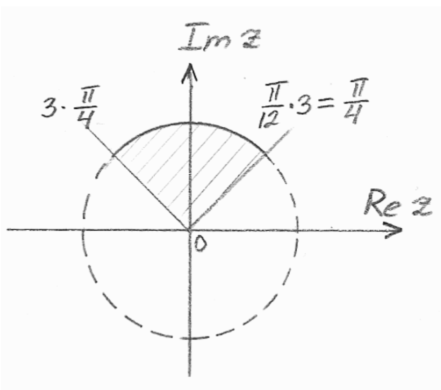


рис. 3.7. Область $Д_1$

$w_2 = (1+i)w_1$

$|1+i| = \sqrt{2} \Rightarrow$ растяжение в $\sqrt{2}$ раз

$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ поворот на $\frac{\pi}{4}$ против часовой стрелки

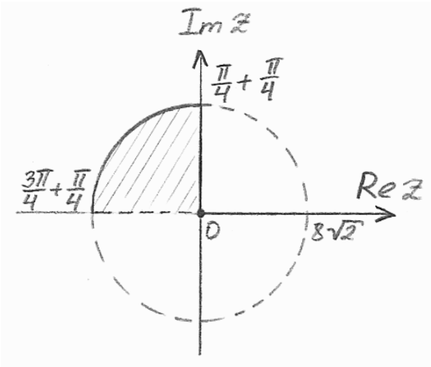


рис. 3.8. область $Д_2$

$w = w_2 - i$

Перенос начала координат в точку $(-i)$

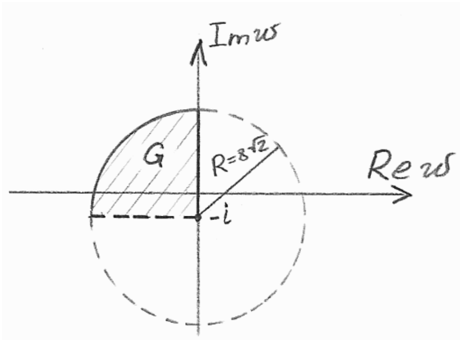


рис. 3.8. область G

$$G: \begin{cases} |w+i| \le 8\sqrt{2} \\ \dfrac{\pi}{2} \le \arg(w+i) < \pi \end{cases}$$

Конформные отображения (продолжение).

1. Показательная функция $\boxed{w = e^z}$.

Для частного случая $z \in \mathbb{R}$, т.е. $\operatorname{Im} z = 0$, определение показательной функции $e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right)$ совпадает с «обычным» определением e^x.

❖ Для комплексного случая $w = e^z$ - регулярна для $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$. Действительно,

$$e^z = \underbrace{e^x \cos y}_{u} + i\underbrace{e^x \sin y}_{v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \equiv \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \equiv -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Тогда

$$\left(e^z\right)' = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(e^z\right)' = e^z}$$

❖ Покажем, что функция $w = e^z$ периодична с чисто мнимым периодом $T = 2\pi i$.
Пусть $e^{z+T} = e^z$, где $T = \alpha + i\beta;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Найдем *T*. Для этого умножим равенство на e^{-z}:

$$e^{z+T} \cdot e^{-z} = e^z \cdot e^{-z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^T = e^0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\alpha+i\beta} = e^0 \quad \Leftrightarrow \quad e^\alpha\left(\cos\beta + i\sin\beta\right) = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^\alpha \cos\beta = 1 & (1) \\ e^\alpha \sin\beta = 0 & (2) \end{cases}$$

Т.к. $\alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad e^\alpha > 0 \quad \Rightarrow$ из (2) следует, что $\sin\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \pi n$.
Тогда из (1) следует:

$$e^\alpha \cos(\pi n) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^\alpha;\ \cos(\pi n) - \text{одного знака} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 2k$$

Тогда $e^\alpha \cdot 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2\pi k.$

Таким образом, $T = 0 + i \cdot 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi i}$ – **период**

- ❖ Функция $w = e^z$ осуществляет отображение $\mathbb{C} \xrightarrow{w} \mathbb{C} \setminus \{0\}$, которое является однозначным, но не взаимнооднозначным.
- ❖ Областью однолистности является полоса $M = \{z \in \mathbb{C} : b < \operatorname{Im} z < b + 2\pi\}$, которая отображается на всю плоскость с разрезом по лучу $\theta = b$.

Например:

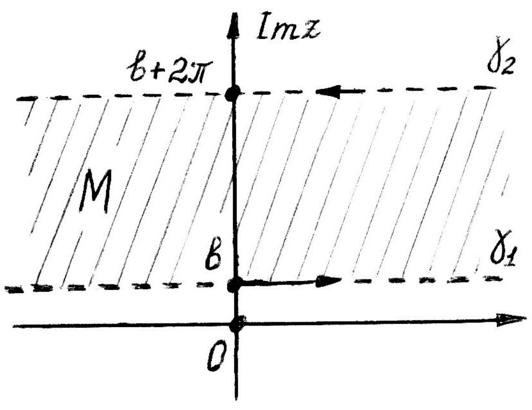


рис. 1.1.

$\gamma_1 : y = b, \quad -\infty < x < +\infty$

$$e^z = \underbrace{e^x}_{r}\left(\cos\underbrace{b}_{\theta} + i\sin\underbrace{b}_{\theta}\right)$$

$\theta = b = const$

$r = e^x$ и $e^{-\infty} < w < e^{+\infty}$,
$0 < w < +\infty$

(см. рис. 1.1)

$\gamma_2 : y = b + 2\pi, -\infty < x < +\infty$

$e^z = e^x\left(\cos(b+2\pi) + i\sin(b+2\pi)\right) = \underbrace{e^x}_{r}\left(\cos b + i\sin b\right)$

Т.е. тот же луч, но он "проходится" в другую сторону (см. рис. 1.2)

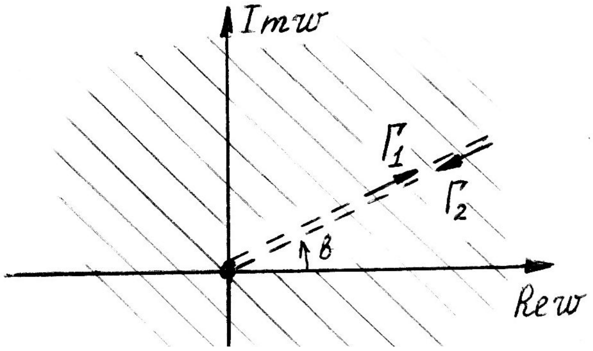


рис. 1.2.

<u>Примеры:</u>

1) Найти образ полосы

$M = \left\{ z : 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2} \right\}$ (см. рис. 1.3)

$\gamma_1 : y = 0, -\infty < x < +\infty$

$e^z = e^x \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 \mapsto \Gamma_1 = \left\{ w : \operatorname{Re} w > 0 \right\}$

$u : 0 \to +\infty$

$\gamma_2 : y = \dfrac{\pi}{2}, -\infty < x < +\infty$

$e^z = e^x\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = ie^x \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 \mapsto \Gamma_2 = \left\{ w : \operatorname{Im} w > 0 \right\}$

$v : +\infty \to 0 \quad \Rightarrow \quad M \mapsto$ в первый квадрант.

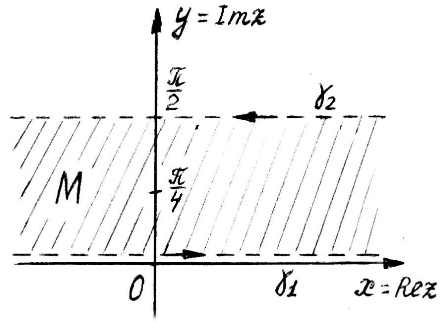


рис. 1.3.

Проверка: пусть $z_0 = \dfrac{\pi}{4} i$.

Тогда $e^{z_0} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = w_0$ (см. рис. 1.4.)

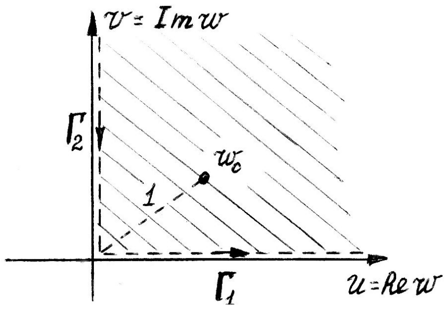


рис. 1.4.

2) Найти образ прямоугольника

$P = \left\{ z : -1 \le \operatorname{Re} z < 1, -\dfrac{\pi}{6} \le \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{4} \right\}$ (см. рис. 1.5)

под действием отображения $w = -ie^{2z} + \dfrac{i}{e^2}$

$w_1 = 2z$

$w_2 = e^{w_1}$

$w_3 = -iw_2$

$w = w_3 + \dfrac{i}{e^2}$

$w_1 = 2\left(x + iy\right) = 2x + i2y$

Простейшая линейная функция: растяжение в 2 раза, без поворота, т.к. $\arg 2 = 0$ (см. рис. 1.6)

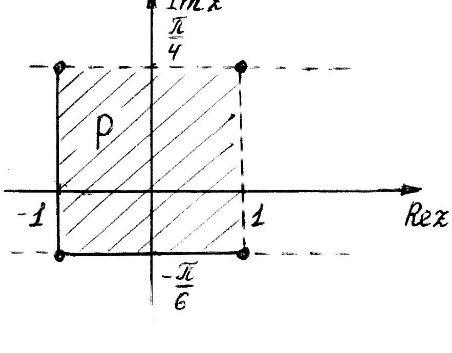


рис. 1.5.

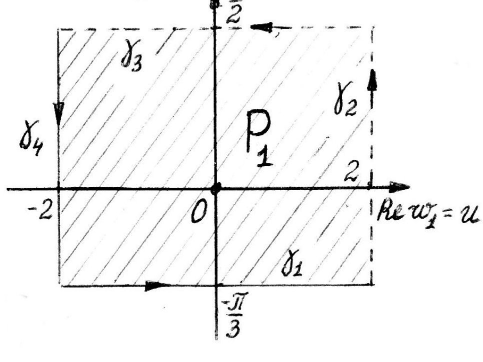


рис. 1.6.

$w_2 = e^{w_1}$

$\gamma_1 : v = -\dfrac{\pi}{3}; \quad u : -2 \to +2$

$$e^{w_1} = e^u \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right), \quad e^u : e^{-2} \to e^2 \text{ (получим отрезок)}$$

$\gamma_2 : u = 2, \quad v : -\dfrac{\pi}{3} \to \dfrac{\pi}{2}$

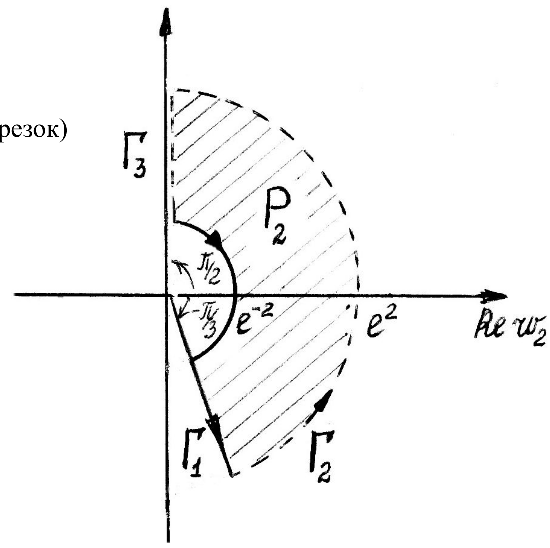
$$e^{w_1} = e^2 (\cos v + i \sin v) \qquad \text{(получим дугу)}$$

$\gamma_3 : v = \dfrac{\pi}{2}, \quad u : 2 \to -2$

$$e^{w_1} = e^u \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \right) \quad \text{(получим отрезок)}$$

$\gamma_4 : u = -2, \quad v : \dfrac{\pi}{2} \to -\dfrac{\pi}{3}$

$$e^{w_1} = e^{-2} (\cos v + i \sin v) \qquad \text{(получим дугу)}$$



Образом прямоугольника P_1 является сектор кольца P_2 - см. рис. 1.7.

рис. 1.7.

$w_3 = -i w_2 \quad \Leftrightarrow \quad |-i| = 1 \quad \Rightarrow \quad$ без растяжения

$\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad$ поворот на 90° по часовой стрелке

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 0$

$\theta_2 = -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{5\pi}{6}$

(см. рис. 1.8)

$w = w_3 + \dfrac{i}{e^2} \quad \Leftrightarrow \quad$ параллельный перенос

(см. рис. 1.9)

3) Найти образ полуполосы:

$$M = \left\{ z : -\infty < \operatorname{Re} z < \ln 2, \quad -\frac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \frac{4\pi}{3} \right\}$$

под действием отображения $w = e^z$

(см. рис. 1.10)

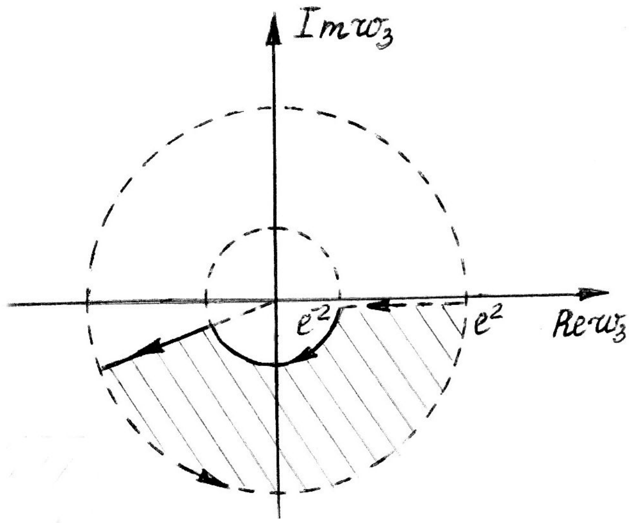


рис. 1.8.

$\gamma_1 : y = -\dfrac{\pi}{3}, \quad x : -\infty \to \ln 2$

$$e^z = e^x \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \quad \text{(отрезок)}$$

$$e^x : 0 \to 2$$

$\gamma_2 : x = \ln 2, \quad y : -\dfrac{\pi}{3} \to \dfrac{4\pi}{3}$

$$e^z = 2\left(\cos y + i \sin y\right) \quad \text{(дуга)}$$

$\gamma_3 : y = \dfrac{4\pi}{3}, \quad x : \ln 2 \to -\infty$

$$e^z = e^x \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} \right) \quad \text{(отрезок)}$$

$$e^x : 2 \to 0$$

(см. рис. 1.11)

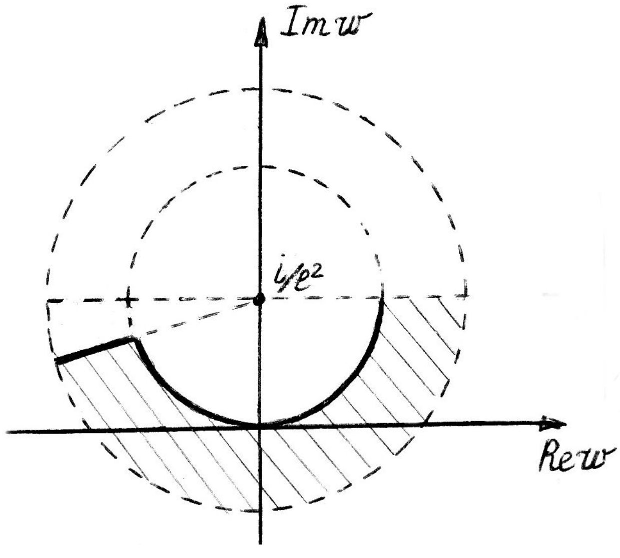


рис. 1.9.

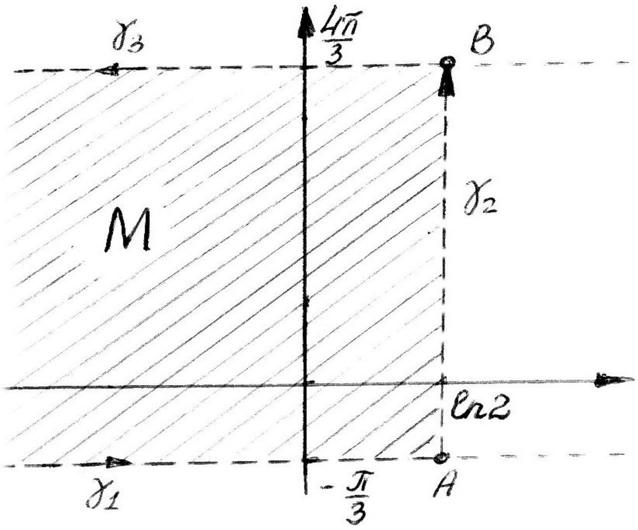


рис. 1.10.

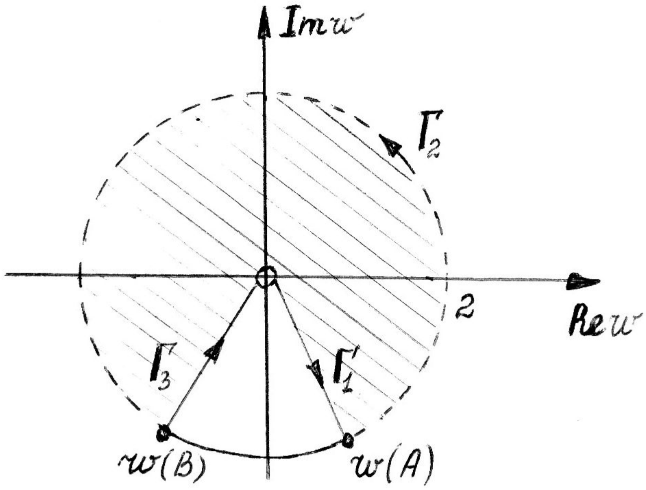


рис. 1.11.

2. Логарифмическая функция $\boxed{w=\ln z}$

Так как функция $w=\ln z$ - многозначная, то рассмотрим отображение, осуществляемое его главным значением, т.е. функцией $\ln z$. Эта функция обратная по отношению к e^z, конформно отображает плоскость с разрезом $(-\infty,0]$ на полосу шириной 2π, параллельную действительной оси (см. рис. 2.1 и 2.2).

$\gamma_1: \quad y=0; x:-\infty\to 0$

$$\ln z=\underbrace{\ln|x|}_{u}+i\underbrace{\pi}_{v}$$

$$|x|:+\infty\to 0 \quad\Rightarrow\quad \ln|x|:+\infty\to-\infty$$

$\gamma_2: y=0; \quad x:0\to-\infty$

$$\ln z=\ln|x|+i\cdot(-\pi)$$

$$|x|:0\to+\infty \quad\Rightarrow\quad \ln|x|:-\infty\to+\infty$$

$$\gamma: \text{дуга окружности } |z|=1 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} r=1\\ -\pi<\varphi<\pi\end{cases}$$

переходит в Γ

$$\ln z=\underbrace{\ln 1}_{0}+i\varphi \quad - \quad \text{отрезок мнимой оси } -\pi<\operatorname{Im} w<\pi$$

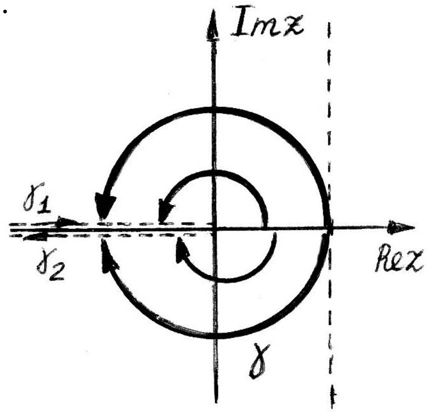


рис. 2.1.

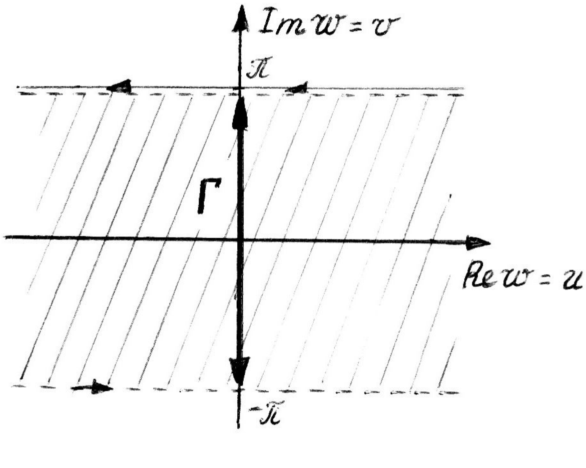


рис. 2.2.

<u>Пример:</u>

Найти образ множества

$$D = \left\{ z : 3 \le |z| < 4, \quad -\frac{\pi}{3} \le \arg z < \frac{\pi}{12} \right\}$$

под действием отображения

$w = 3\ln(2iz) - 4i$

$w_1 = 2iz$

$k = 2$ – растяжение

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ – поворот на 90°

$$\frac{\pi}{12} + \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{6\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

$$-\frac{\pi}{3} + \theta = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

(см. рис. 2.3)

$w_2 = \ln w_1 = \ln|w_1| + i \arg w_1$

Тогда, например,

$A'B' : \quad \arg w_1 = \dfrac{\pi}{6} = \text{const}$

$$|w_1| : 6 \to 8 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \operatorname{Im} w_2 = \dfrac{\pi}{6}, \\ \operatorname{Re} w_2 : 6 \to 8 \end{matrix}$$

т.е. $A' \to A''$, $B' \to B''$

(см. рис. 2.4)

$w_3 = 3w_2 - 4i$:

линейная, растяжение в 3 раза

поворота нет, т.к. $\arg 3 = 0$ и сдвиг на $-4i$

(см. рис. 2.5 и 2.6)

$D \to G$

$$G : \begin{cases} 18 \le \operatorname{Re} w < 24 \\ \dfrac{\pi}{2} - 4 \le \operatorname{Im} v < \dfrac{7\pi}{4} - 4 \end{cases}$$

(см. рис. 2.7)

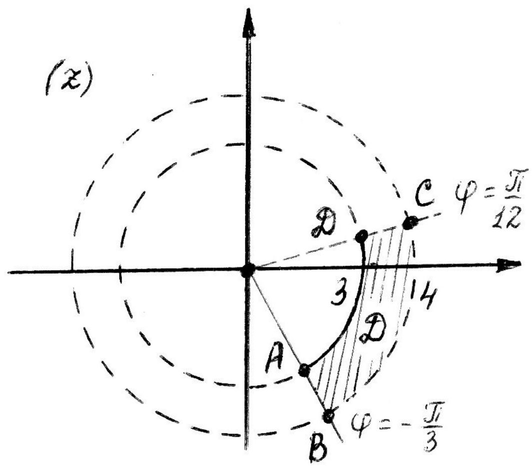


рис. 2.3.

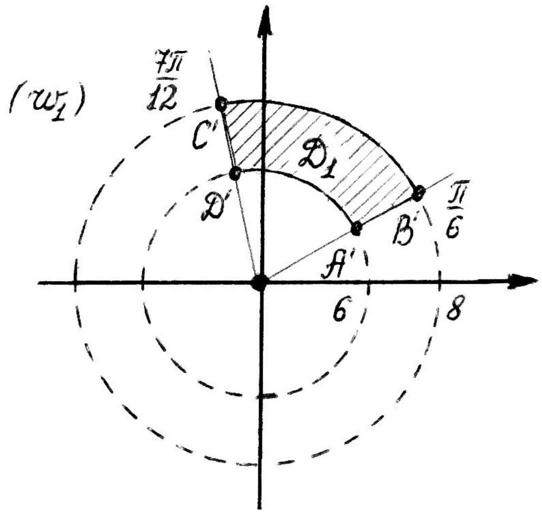


рис. 2.4.

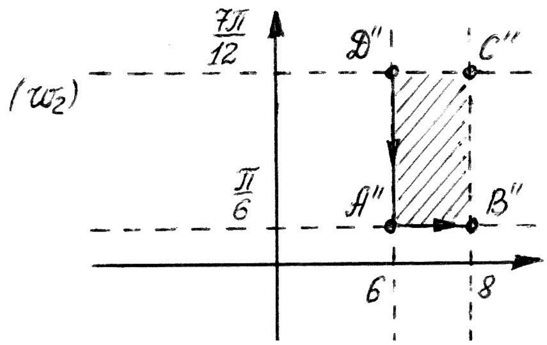


рис. 2.5.

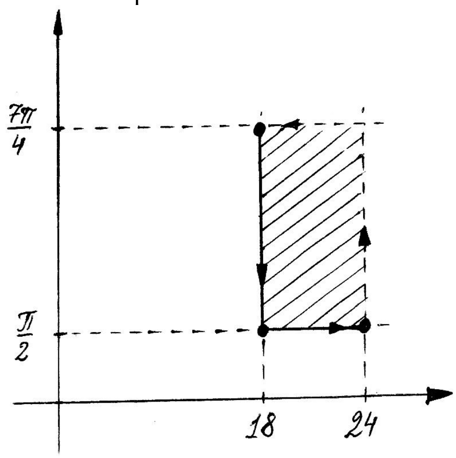


рис. 2.6.

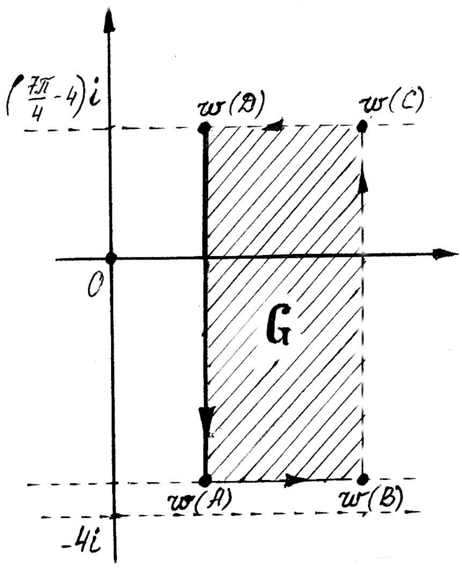


рис. 2.7.

3. Функция Жуковского $\boxed{w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}$

❖ Регулярна $\forall z, z\neq 0$ (проверьте!)

❖ Производная $w'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$ (получите!)

❖ Конформное отображение для $\forall z\neq\pm1$, т.к. $w'=0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad z=\pm1$

Задача для самостоятельного решения:

Доказать, что любая окружность, проходящая через точки $z_1=1$ и $z_2=-1$, делит всю плоскость $\mathbb{C}$ на две области однолистности функции Жуковского.

❖ Функция Жуковского переводит окружности $|z|=r_0\neq1$ в эллипсы с полуосями $a=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right); b=\frac{1}{2}\left|r_0-\frac{1}{r_0}\right|$ и фокусами в $z=\pm1$.

4. Тригонометрические и гиперболические функции.

$\sin z$	$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$	Регулярна	Периодическая $T=2\pi$
$\cos z$	$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$	Регулярна	Периодическая $T=2\pi$
$\operatorname{sh} z$	$\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$	Регулярна	Периодическая $T=2\pi i$
$\operatorname{ch} z$	$\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$	Регулярна	Периодическая $T=2\pi i$

Отображения, осуществляемые этими функциями, являются композицией ранее изученных отображений.

Например, $w=\cos z$ - это композиция поворота на угол $\frac{\pi}{2}$, показательной функции и функции Жуковского, т.е.

$1) w_1=iz$

$2) w_2=e^{w_1}$

$3) w=\frac{1}{2}\left(w_2+\frac{1}{w_2}\right)$

<u>Пример:</u>

Найти образ полосы $M = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ при отображении $w = \cos z$

Полоса M перейдет в плоскость с двумя разрезами по действительной оси: $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ (см. рис. 4.1)

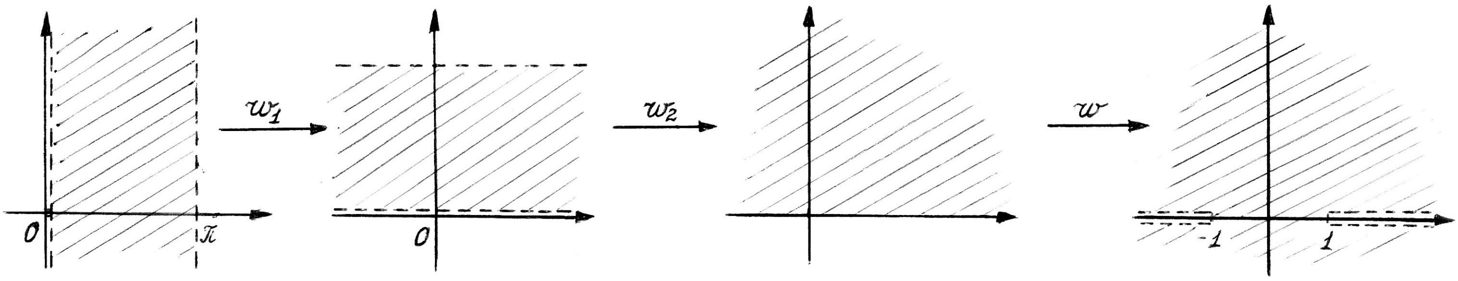


рис. 4.1.

Интегрирование функций комплексного переменного.

1. Определение интеграла по кривой в $\mathbb{C}$.

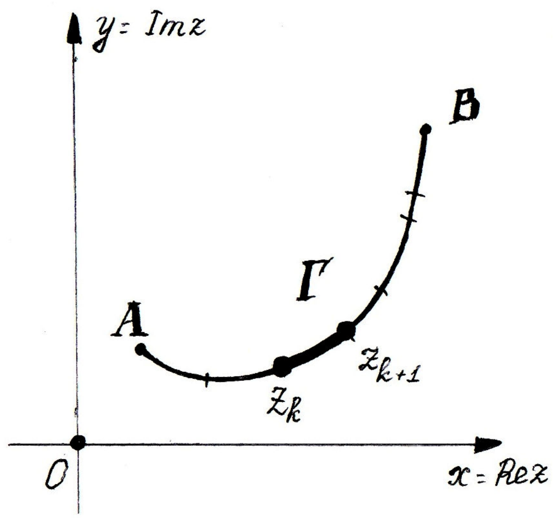


рис. 1.1.

Пусть *f*(*z*) определена на $\mathbb{C}$. Г – кусочно-гладкая кривая на комплексной плоскости, соединяющая точки А и В (без самопересечений) – см рис. 1.1. Разобьем ее на ***n*** дуг в направлении от А к В точками z_k и рассмотрим дугу, соединяющую z_k и z_{k+1} - см. рис. 1.2.

Выберем M_k на этой дуге $M_k \in \left(\overset{\frown}{z_k ; z_{k+1}}\right)$; $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$; составим интегральную сумму $\sum_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot \Delta z_k$.

Если существует $\lim\limits_{\substack{\max|\Delta z_k| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot \Delta z_k$ и он не зависит от способа разбиения и выбора точек M_k, то он называется **интегралом *f*(*z*)** по дуге $\overset{\frown}{AB}$ и обозначается $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$.

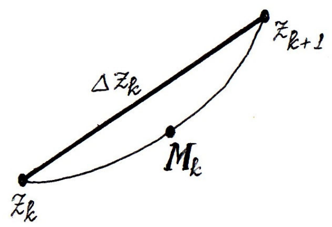


рис. 1.2.

2. Связь с криволинейным интегралом II рода.

Пусть $f(z) = u(x;y) + i \cdot v(x;y)$

$z = x + i \cdot y$;

$\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$; $\quad dz = dx + i \cdot dy$;

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} (u + i \cdot v)(dx + i \cdot dy) = \int\limits_{\Gamma} (u \cdot dx + i \cdot v \cdot dx + i \cdot u \cdot dy - v \cdot dy) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \underbrace{u \cdot dx - v \cdot dy}_{\mathrm{Re}\int\limits_{\Gamma} f(z)dz} + i \cdot \int\limits_{\Gamma} \underbrace{v \cdot dx + u \cdot dy}_{\mathrm{Im}\int\limits_{\Gamma} f(z)dz}$$

$\mathrm{Re}\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$, $\mathrm{Im}\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ - **криволинейные интегралы II рода** (см. материал II-го семестра).

3. Основные свойства интеграла.

1) <u>Теорема существования.</u>
Если Г - кусочно-гладкая дуга, *f*(*z*) – непрерывна на Г, то существует $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$.

2) $\int\limits_{\Gamma} dz = z_1 - z_0$ - см. рис. 3.1.

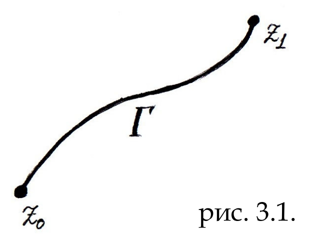


рис. 3.1.

3) Линейность:

$$\int_{\Gamma}\left[C_1 f_1(z)+C_2 f_2(z)\right]dz = C_1\int_{\Gamma} f_1(z)dz + C_2\int_{\Gamma} f_2(z)dz$$

4) Аддитивность:

$$\int_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

$\Gamma = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BC}$

(см. рис. 3.2)

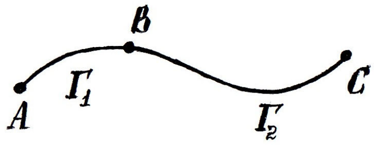


рис. 3.2.

5) Изменение направления интегрирования:

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz = -\int_{\Gamma^-} f(z)dz$$

6) Оценка модуля:

Если $\left|f(z)\right| \le M \quad \forall z\in\Gamma$, то $\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \le M\cdot l$. где l – длина кривой Γ.

7) Теорема о среднем не верна!

4. Теорема Коши для односвязной области.

Определение односвязной области.

Область D называется **односвязной**, если любой замкнутый контур можно «стянуть» в любую ее точку. См. рис. 4.1. – здесь область D_1 – односвязная, D_2 и D_3 – нет (D_2 с выколотой точкой; D_3 с выколотой точкой, «разрезом» и «дыркой»).

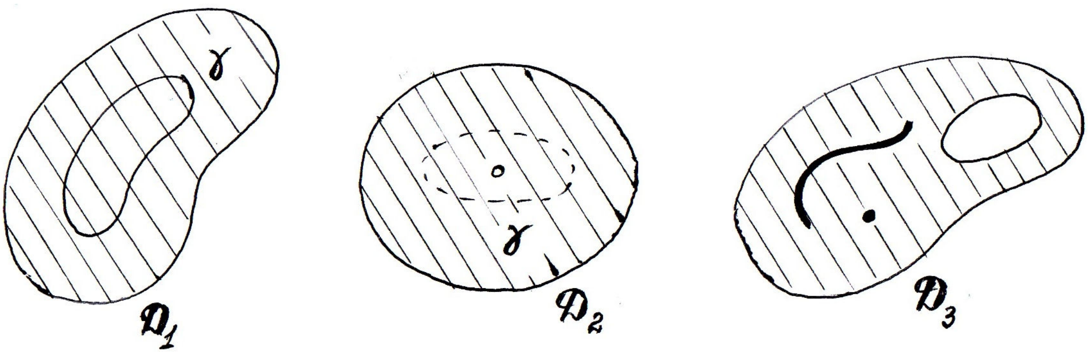


рис. 4.1.

Определение замкнутого контура.

Замкнутый контур – кусочно-гладкая замкнутая кривая без самопересечений, т.е. $z(t_1)\neq z(t_2)$, если $t_1\neq t_2$ (кроме концов).

То есть, исключаем линии такого вида - см. рис. 4.2:

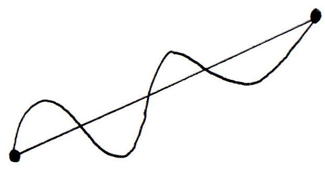


рис. 4.2.

Теорема.

Если $f(z)$ – регулярна в D, а D – односвязна, то интеграл по любому замкнутому контуру $\gamma\subset D$ равен нулю: $\boxed{\oint_{\gamma} f(z)dz = 0}$

(см. рис. 4.3).

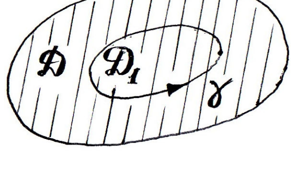


рис. 4.3.

Доказательство:

Для облегчения доказательства примем такие дополнительные условия: $u=\operatorname{Re} f(z)$; $v=\operatorname{Im} f(z)$ - непрерывные и дифференцируемые, и имеют непрерывные частные производные.

$$\oint\limits_{\gamma}(u+i\cdot v)(dx+i\cdot dy)=\int\limits_{\gamma}udx-v\cdot dy+i\cdot\int\limits_{\gamma}vdx+u\cdot dy=\left\{\begin{array}{l}\text{в силу доп. условий}\\ \text{для этих интегралов}\\ \text{верна формула Грина}\end{array}\right.$$

$$\boxed{\oint\limits_{\gamma}Pdx+Qdy=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy}$$

$$=\iint\limits_{D_1}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+i\cdot\iint\limits_{D_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=\left\{\begin{array}{l}\text{но в силу регулярности } f(z)\\ \text{выполнены условия Коши-Римана:}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\ \text{ и }\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{array}\right.=$$

$$=-\iint\limits_{D_1}\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{=0}dxdy+i\cdot\iint\limits_{D_1}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0}dxdy=0.$$

Ч.т.д.

Следствие:

Пусть γ_1 и γ_2 - два контура с общим началом и концом без самопересечений, лежащие в односвязной области D (см. рис. 4.4), а $f(z)$ – регулярна в D. Тогда: $\int\limits_{\gamma_1}f(z)dz=\int\limits_{\gamma_2}f(z)dz$. То есть интеграл от регулярной функции по контуру не зависит от пути интегрирования, а зависит от начальной и конечной точки. Действительно, $\int\limits_{\gamma_1^+}f(z)dz+\int\limits_{\gamma_2^-}f(z)dz=0$, т.к. γ_1^+ и γ_2^- образуют замкнутый контур. Следовательно,

$$\int\limits_{\gamma_1^+}f(z)dz=-\int\limits_{\gamma_2^-}f(z)dz\quad\Rightarrow\quad\int\limits_{\gamma_1^+}f(z)dz=\int\limits_{\gamma_2^+}f(z)dz=\int\limits_{A}^{B}f(z)dz.$$

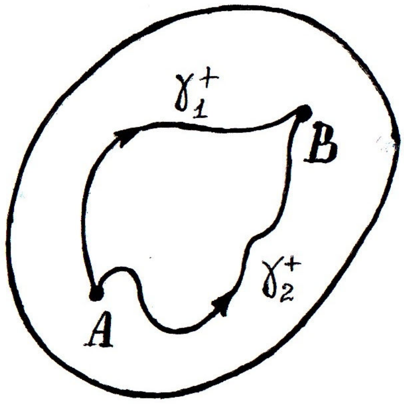


рис. .4.4.

Для регулярной функции в односвязной области верна формула Ньютона – Лейбница:

$$\boxed{\int\limits_{A}^{B}f(z)dz=F(z)\Big|_A^B=F(B)-F(A)}.$$

А, следовательно, интегралы от функций комплексного переменного в области их регулярности вычисляются методами действительного анализа.

Примеры:

1) $\int\limits_{\gamma}\left(z^2+3iz\right)dz=\int\limits_{0}^{i}\left(z^2+3iz\right)dz=\left(\frac{z^3}{3}+\frac{3iz^2}{2}\right)\Bigg|_0^i=$

$=\frac{i^3}{3}+\frac{3i}{2}(-1)=-\frac{i}{3}-\frac{3}{2}i=-\frac{11}{6}i$

(см. рис. 4.5).

2) $\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z-i}=0;\quad\gamma:\ |z|=\frac{1}{2}$

Контур $\gamma\subset$ области регулярности, следовательно, $\int=0$ (см. рис. 4.6.).

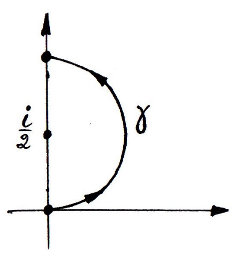


рис. 4.5.

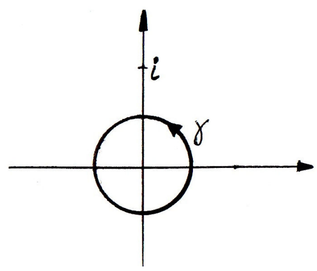


рис. 4.6.

3) $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-i}$; $\gamma: \ |z-i|=1$ (см. рис.4.7).

Теорема Коши неприменима, т.к. в точке $z_0 = i$ нарушается регулярность. Запишем параметрическое уравнение этой окружности:

$$\begin{cases} x - x_0 = R\cos t, \\ y - y_0 = R\sin t \end{cases} \quad \begin{matrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ R = 1 \end{matrix} \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$$

$$z = x + i\cdot y = \cos t + i\cdot(1+\sin t) = \cos t + i\cdot \sin t + i = e^{i\cdot t} + i \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-i} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\left(e^{i\cdot t}+i\right)}{e^{i\cdot t}+i-i} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{de^{i\cdot t}}{e^{i\cdot t}} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{ie^{i\cdot t}dt}{e^{i\cdot t}} = i\cdot\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

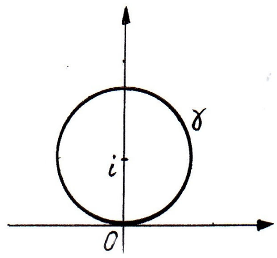


рис. 4.7.

5. Теорема Коши для многосвязной области.

Теорема.

Если $f(z)$ – регулярна в области D, ограниченной кривыми: $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_k$, то $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$, где $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_k$ - полная граница области (см. рис. 5.1).

Доказательство:

Проведем разрезы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ и будем обходить «общий» контур в таком порядке:
$\gamma_1^+, \Gamma_1, \gamma_1^-$, часть $\Gamma_0, \gamma_2^+, \Gamma_2, \gamma_2^-$, часть $\Gamma_0, \ldots, \gamma_k^+, \Gamma_k, \gamma_k^-, \Gamma_0$. Тогда мы обойдем ставшую односвязной область D, следовательно:

$$\int\limits_{\gamma_1^+} + \int\limits_{\Gamma_1} + \int\limits_{\gamma_1^-} + \int\limits_{\gamma_2^+} + \int\limits_{\Gamma_2} + \int\limits_{\gamma_2^-} + \ldots + \int\limits_{\gamma_k^+} + \int\limits_{\Gamma_k} + \int\limits_{\gamma_k^-} + \int\limits_{\Gamma_0} = 0, \text{ но}$$

$$\int\limits_{\gamma_1^+} = -\int\limits_{\gamma_1^-}, \ \int\limits_{\gamma_2^+} = -\int\limits_{\gamma_2^-}, \ \ldots, \ \int\limits_{\gamma_k^+} = -\int\limits_{\gamma_k^-} \Rightarrow \int\limits_{\Gamma_1} + \int\limits_{\Gamma_2} + \ldots + \int\limits_{\Gamma_k} + \int\limits_{\Gamma_0} = 0 \Rightarrow \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Ч.т.д.

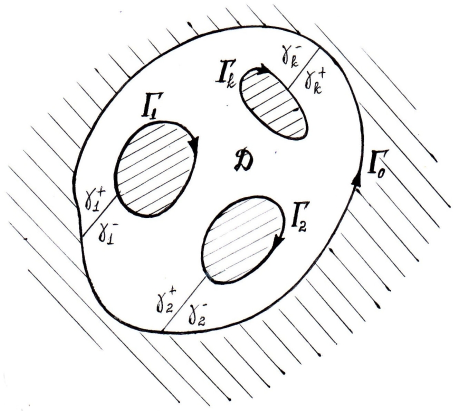


рис. 5.1.

Следствие:

$$\int\limits_{\Gamma_0} = -\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\Gamma_i}$$

Замечание:

Обход выбран так, что область остается слева (по Γ_0 против часовой стрелки, по Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ - по часовой стрелке). Такой обход принято считать обходом в положительном направлении.

6. Интегральные формулы Коши.

Теорема 1.

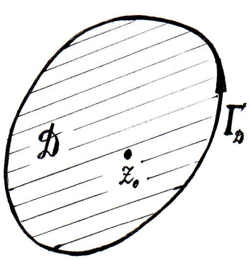


рис. 6.1.

Функция $f(z)$ – регулярна в замкнутой односвязной области, т.е. регулярна в любой ее точке, следовательно:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\Gamma_D}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\,, \qquad (*)$$

где $z_0\in D$ - любая точка внутри области, Γ_D - граница области D (см. рис. 6.1).

Теорема 2.

Функция $f(z)$ – регулярна в замкнутой односвязной области D (в том числе в точке z_0), следовательно, существуют производные всех порядков в z_0 и

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\Gamma_D}\frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}dz \qquad (**)$$

Замечание:

Формула (*) называется **интегральной формулой Коши для функции**; формула (**) – **интегральной формулой Коши для производной.**

Применение формул (*) и (**):

1) Вычислить $\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^2}{z-2i}dz=0$ (по теореме Коши для односвязной области)

см. рис. 6.2.

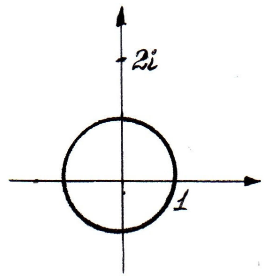


рис. 6.2.

2) Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=4}\frac{z^2}{z-2i}dz\overset{(*)}{=}2\pi i\cdot f(2i)=\text{(здесь } f(z)=z^2 \text{ - регулярна)}=2\pi i\cdot\left(2i\right)^2=\underline{-8\pi i}$$

см. рис. 6.3.

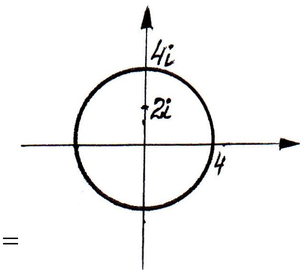


рис. 6.3.

3) Вычислить $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{\sin z dz}{\left(z+i\right)^3}=0$ (по теореме Коши)

см. рис. 6.4.

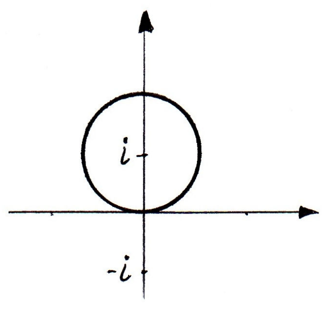


рис. 6.4.

4) Вычислить

$$\oint\limits_{|z+i|=1}\frac{\sin z dz}{\left(z+i\right)^3}=\frac{2\pi i}{2!}f''\left(-i\right)=\quad\text{(здесь } f(z)=\sin z\text{)}\quad=\pi i\left(\sin z\right)''\Big|_{z=-i}=\pi i\left(-\sin\left(-i\right)\right)=\pi i\sin i=$$

$$=\pi i\cdot\frac{e^{i\cdot i}-e^{-i\cdot i}}{2i}=\pi\cdot\frac{e^{-1}-e^{1}}{2}=\underline{-\pi\,\mathrm{sh}1}$$

Примечание:

Доказательство теоремы 1 можно прочесть в книге:
В.Д. Морозова «Теория функций комплексного переменного», М.: изд-во МГТУ им. Баумана, 2002 (Выпуск X в серии «Математика в техническом университете»), на стр. 164 – 165 (глава 5, пункт 5.5, теорема 5.8).

Доказательство теоремы 2 – там же, на стр. 170 (глава 5, пункт 5.6, теорема 5.9).

Комплексные ряды.

1. Числовые ряды с комплексными членами.

Напомним некоторые понятия и факты, изучавшиеся в курсе рядов.

- Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется сходящейся, а число z ее пределом $\left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z\right)$, если существуют конечные пределы $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, где $x_n = \operatorname{Re} z_n$, $y_n = \operatorname{Im} z_n$
- Ряд с комплексными членами $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ называется сходящимся, если последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм сходится $\left(S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k\right)$
- Комплексное число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется суммой сходящегося числового ряда с комплексными членами. Иногда пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n \to S$.
- Ряд с комплексными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n|$. В этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ тоже сходится. Напомним, что $|w_n| = |u_n + iv_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} > 0$.
- Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n|$ - числовой знакоположительный ряд, следовательно, его сходимость (расходимость) можно установить с помощью известных нам признаков Даламбера и Коши.

Теорема 1.

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = d$, то при $d < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ **абсолютно сходится**, а при $d > 1$ этот ряд **расходится**.

Теорема 2.

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|w_n|} = c$, то при $c < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ **абсолютно сходится**, а при $c > 1$ этот ряд **расходится**.

Примеры:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{in}}{n^2}$; $w_n = \dfrac{e^{in}}{n^2} = \dfrac{\cos n + i \sin n}{n^2}$;

$|w_n| = \dfrac{1}{n^2}\sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n} = \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ – обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow$ ряд (1) сходится абсолютно.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2-i}{3}\right)^{n^2}$; $w_n = \left(\dfrac{2-i}{3}\right)^{n^2}$; $|w_n| = \left|\dfrac{2-i}{3}\right|^{n^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow |w_n| = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|w_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n^2} = 0 < 1 \Rightarrow$ ряд (2) абсолютно сходится.

2. Комплексные степенные ряды.

- Степенным рядом ранее мы называли ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n \left(z-z_0\right)^n$, где C_n и z_0 - комплексные числа, а z - комплексная переменная.
- Те значения переменной z, при которых ряд сходится, образуют область сходимости.
- Для любого степенного ряда существует круг с центром в точке z_0, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится, а вне его – расходится.
- Этот круг $0 \le \left|z-z_0\right| < R < +\infty$ называется кругом сходимости, а его радиус R - радиусом сходимости.
- Для степенных рядов верна теорема Абеля (см. предыдущий семестр).
- Верны также следующие два утверждения:

Теорема 1.
Во всех точках z внутри круга сходимости степенной ряд **абсолютно сходится** и его сумма $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n \left(z-z_0\right)^n$ - **регулярна**.

Теорема 2.
Если степенной ряд абсолютно сходится в какой-либо точке границы круга, то он **абсолютно сходится** и на всей границе.

- Рассмотрим теперь ряды по отрицательным степеням разности $\left(z-z_0\right)$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{\left(z-z_0\right)^n}$.

Для рядов такого вида областью сходимости будет являться не внутренность, а внешность круга, т.е. множество вида $\left|z-z_0\right| > r \ge 0$.

Примеры:

Найти область сходимости степенного ряда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} z^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} \left|z^n\right|$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|w_n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{1/n}}{2}\left|z\right| = \dfrac{\left|z\right|}{2} < 1 \Leftrightarrow \left|z\right| < 2$ (см. рис. 2.1)

$\left|z\right| = 2 \Rightarrow \sum n -$ расходится $\Rightarrow$ абсолютной сходимости на границе нет.

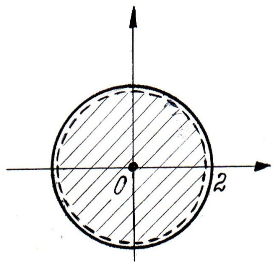


рис. 2.1

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\dfrac{\left(z-2i\right)^n}{2^n(n+1)}}_{w_n^I} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\dfrac{n^2+5}{\left(z-2i\right)^n}}_{w_n^I}$ $\left(\begin{array}{l}(2) - \text{ряд по всем целым} \\ \text{степеням } \left(z-2i\right)\end{array}\right)$

$$I: \lim_{n\to\infty} \frac{\left|w_{n+1}\right|}{\left|w_n\right|} = \left|z-2i\right| \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}(n+2)} = \frac{1}{2}\left|z-2i\right| < 1 \Rightarrow \boxed{\left|z-2i\right| < 2} - \text{область } D_{\mathrm{I}}$$

$$II: \lim_{n\to\infty} \frac{\left|w_{n+1}\right|}{\left|w_n\right|} = \frac{1}{\left|z-2i\right|} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+5}{n^2+5} = \frac{1}{\left|z-2i\right|} < 1 \Rightarrow \boxed{\left|z-2i\right| > 1} - \text{область } D_{\mathrm{II}}$$

$D = D_I \cap D_{II} = \left\{z : 1 < \left|z-2i\right| < 2\right\}$ (см. рис. 2.2)

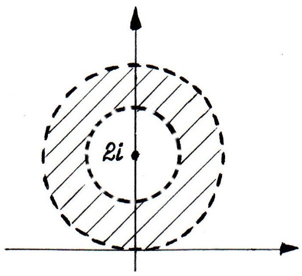


рис. 2.2

3. Ряды Тейлора и Лорана.

Функция $f(z)$, регулярная в круге $|z-z_0|<R, 0\le R<+\infty$, раскладывается в ряд по степеням $(z-z_0)$ вида: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. Этот ряд называется **рядом Тейлора**. В силу существования у регулярной функции производных любого порядка, коэффициенты a_n определяются аналогично коэффициентам ряда Тейлора для действительных функций:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Это выражение для коэффициентов называется **дифференциальным**. В силу интегральной формулы Коши для производной $f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ можно получить интегральное выражение для коэффициентов:

$$a_n=\frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \text{ где } \gamma:|z-z_0|=r.$$

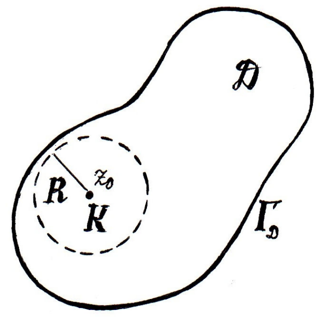


рис. 3.1

- Если функция $f(z)$ регулярна в области D (см. рис. 3.1), а точка $z_0\in D$, то ряд Тейлора этой функции $f(z)$ сходится к ней внутри максимального круга К с центром в z_0, лежащего в области D
  $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \to f(z)$ в К. То есть радиус сходимости
  $R=\min\limits_{z_1\in\Gamma_D}|z_1-z_0|$ $(\Gamma_D -$ граница области$)$
- Функция $f(z)$, регулярная в кольце $r<|z-z_0|<R,\ 0\le r<R<+\infty$,
  раскладывается в ряд по степеням $(z-z_0)$ вида: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, где
  $$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\substack{|z-z_0|=\rho\\ r<\rho<R}}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},\ n=0;\pm1;\pm2;...$$
  Этот ряд называется **рядом Лорана**. Его можно представить в виде суммы двух рядов: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$
  Первое слагаемое этой суммы называется <u>главной</u> частью ряда Лорана, а второе – <u>правильной</u> частью.
- Ряды Тейлора и Лорана определяются единственным образом (докажите!)
- Ряды Тейлора и Лорана можно почленно дифференцировать и интегрировать (сформулируйте и докажите соответствующие теоремы).

<u>Примеры:</u>

Разложить в ряд по степеням z функции e^{3z}, $z^3e^{1/z}$, $\dfrac{1}{z-2}$.

1) $f_1(z)=e^{3z}$ регулярна во всей комплексной плоскости $(|z|<+\infty)$, следовательно, раскладывается в ряд Тейлора, сходящийся к $f_1(z)$ при любом z:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{3^n}{n!},\text{ т.к. } \left(e^{3z}\right)^{(n)}=3^n e^{3z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(z)=e^{3z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}z^n=1+32+\frac{9z^2}{2!}+\frac{27z^2}{3!}+...$$

2) $f_2(z)=z^3e^{1/z}$ - регулярна везде, кроме $z=0$, т.е. регулярна в области $0<|z|<+\infty$. Это кольцо $(r=0;\ R=\infty)\Rightarrow f_2(z)$ разложима в ряд Лорана.

$$e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!};\text{ положим } w=\frac{1}{z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^3e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^{n-3}}=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!z^2}+\ldots$$

Обратим внимание на то, что у этого ряда Лорана первые 4 слагаемые составляют правильную часть, а остальные – главную.

3) $f_3(z)=\dfrac{1}{z-2}$. Существуют две области регулярности этой функции (см. рис. 3.2) с центром в $z_0=0$:

$D_1: |z|<2$ круг

$D_2: 2<|z|<+\infty$ кольцо

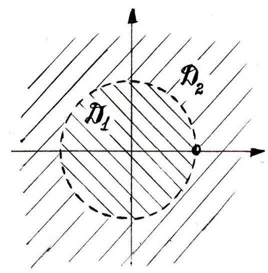


рис. 3.2

В круге D_1 $f_3(z)$ разложится в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z^{n+1}}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\ldots\right)$$

В силу формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$\left|\dfrac{z}{2}\right|<1\Rightarrow|z|<2$, т.е., действительно, ряд сходится в D_1.

В кольце D_2 $f_3(z)$ разложится в ряд Лорана

$$f_3(z)=\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z(1-2/z)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

$\left|\dfrac{2}{z}\right|<1\Rightarrow 2<|z|$, т.е. ряд сходится именно в D_2.

<u>Замечание:</u> Для 1-го из этих двух рядов «по степеням z» синонимично «в окрестности $z_0=0$». Для 2-го ряд по степеням z является рядом в окрестности $z=\infty$.

<u>Задача:</u>

Для функции $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ написать ряд Лорана, сходящийся в кольце $1<|z-2|<2$.

Т.к. центром кольца является точка $z_0=2$, то ряд Лорана будет иметь вид $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-2)^n$. Всего таких рядов можно написать 3 штуки по числу областей регулярности функции $(D_1;\ D_2;\ D_3)$ (см. рис. 3.3).

$$f(z)=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z-2}=\frac{A(z-1)(z-2)+Bz(z-2)+Cz(z-1)}{z(z-1)(z-2)}$$

$z=0:\quad 2A=1\Rightarrow A=1/2$

$z=1:\quad -B=1\Rightarrow B=-1\qquad\Rightarrow\ f(z)=\underset{а)}{\dfrac{1}{2z}}-\underset{б)}{\dfrac{1}{z-1}}+\underset{в)}{\dfrac{1}{2(z-2)}}$

$z=2:\quad 2C=1\Rightarrow C=1/2$

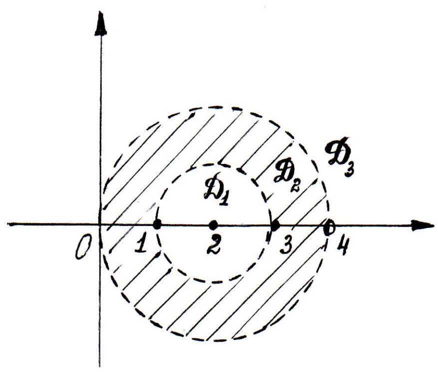


рис. 3.3

$$а):\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+(z-2)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{n+2}}$$

$|q|=\left|\dfrac{z-2}{2}\right|<1\Rightarrow|z-2|<2\qquad(G_1)$

$б): \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}$

$|q| = \frac{1}{|z-2|} < 1 \Rightarrow |z-2| > 1 \quad (G_2)$

$в): \frac{1}{2(z-2)} -$ уже разложено по $(z-2)$

Итак,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{2^{n+2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} + \frac{1}{2(z-2)}$$

Область сходимости $G_1 \cap G_2 = D_2$

<u>Задача</u> (аналог Т.Р. № 3)

Получить **все** разложения $f(z)$ в ряд по степеням $z - z_0$:

$f(z) = \frac{z^5}{z^2+4}, \quad z_0 = 0$

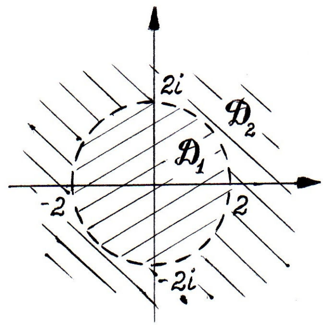


рис. 3.4

В точке $z_0 = 0$ $f(z)$ регулярна,

следовательно 2 области регулярности (см. рис. 3.4).

$D_1 : |z| < 2$ круг

$D_2 : |z| > 2$ кольцо

$\Rightarrow$ 2 различных ряда.

$$D_1 : f(z) = z^5 \cdot \frac{1}{4\left(1+\frac{z^2}{4}\right)} = \frac{z^5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+5}}{4^{n+1}}, \quad \left|\frac{z^2}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$$

И это ряд Тейлора.

$$D_2 : f(z) = z^5 \cdot \frac{1}{z^2\left(1+\frac{4}{z^2}\right)} = z^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{z^{2n-3}}, \quad \left|\frac{4}{z^2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 2$$

И это ряд Лорана.

<u>Изолированные особые точки.</u>

1. Нули регулярной функции.

❖ Точка z_0 называется нулем ***n***-го порядка регулярной функции $f(z)$, если $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \ a \ f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

<u>Пример:</u>

$w = (z-i)^3 \ \Rightarrow \ w(i) = 0;$

$w'(z) = 3(z-i)^2 \ \Rightarrow \ w'(i) = 0;$

$w''(z) = 6(z-i) \ \Rightarrow \ w''(i) = 0;$

$w'''(z) = 6 \ \Rightarrow \ w'''(i) = 6 \neq 0 \ \Rightarrow \ z_0$ – нуль третьего порядка для $w = (z-i)^3$

❖ **Теорема.** Если z_0 - нуль порядка m - регулярной функции $f(z)$, то ее ряд Тейлора начинается со степени $(z-z_0)^m$.

<u>Доказательство:</u>

Коэффициенты ряда Тейлора регулярной функции $f(z)$ находятся по формуле:

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Если z_0 - нуль порядка m, то для $\forall n < m \ \Rightarrow \ f^{(n)}(z_0) = 0$, а $f^{(m)}(z_0) \neq 0 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ C_n = 0(n < m), C_m \neq 0 \ \Rightarrow$ Ряд Тейлора имеет вид:

$$f(z) = C_m (z-z_0)^m + C_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + ... \qquad (*)$$

Ч.т.д.

<u>Следствие:</u>

Чтобы $f(z)$ - регулярная в окрестности точки z_0, имела в этой точке нуль порядка m, необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее представление:

$$f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ - регулярна в окрестности точки z_0 и $\varphi(z) \neq 0$.

<u>Доказательство:</u>

Из $(*)$ следует, что

$f(z) = (z-z_0)^m \left[C_m + C_{m+1}(z-z_0) + ...\right] = (z-z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ сумма ряда Тейлора, стоящего в квадратных скобках, т.е. $\varphi(z)$ - регулярна и $\varphi(z_0) = C_m \neq 0$.

Ч.т.д.

<u>Замечание:</u>

Самостоятельно докажите «в обратную сторону».

<u>Пример:</u>

$f(z) = z^2 - \sin^2 z$ имеет в $z_0 = 0$ нуль порядка 4. Действительно,

$f(0) = 0;$

$f'(0) = (2z - 2\sin z \cdot \cos z)|_{z=0} = 0;$

$f''(0) = (2 - 2\cos 2z)|_{z=0} = 0;$

$f'''(0) = 4\sin 2z|_{z=0} = 0;$

$f^{IV}(0) = 8\cos 2z|_{z=0} = 8 \neq 0;$

С другой стороны,

$$f(z)=z^2-\frac{1-\cos 2z}{2}=z^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2z=$$

$$=z^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\frac{(2z)^6}{6!}+\ldots\right)=$$

$$=\cancel{z^2}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{4z^2}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{16z^4}{24}-\frac{1}{2}\cdot\frac{64z^6}{720}+\ldots=$$

$$=\frac{2^3}{4!}z^4-\frac{2^5}{6!}z^6+\frac{2^7}{8!}z^8-\ldots=z^4\left(\frac{2^3}{4!}-\frac{2^5}{6!}z^2+\frac{2^7}{8!}z^4-\ldots\right)=$$

$$=z^4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{2n-1}z^{2n-4}}{(2n)!}=z^4\cdot\varphi(z),\quad \varphi(0)=\frac{8}{4!}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}\neq 0$$

Ряд, суммой которого является $\varphi(z)$, абсолютно сходится на всей комплексной плоскости:

$$\frac{|w_{n+1}|}{|w_n|}=\frac{2^{2n+1}|z|^{2n-2}(2n)!}{(2n)!(2n+2)2^{2n-1}|z|^{2n-4}}=\frac{2|z|^2}{2n+2}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\lim_{n\to\infty}\frac{2|z|^2}{2n+2}=0<1\;\Rightarrow\; f(z)=z^4\varphi(z),\ \text{где}\ \ \varphi(z)\ -\ \text{регулярна и}\ \varphi(z_0)\neq 0.$$

2. Изолированные особые точки.

- ❖ Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности точки z_0 за исключением самой этой точки.
- ❖ Т.к. «выколотая» окрестность точки z_0 - частный случай кольца, то функция раскладывается в этой окрестности в ряд Лорана.

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=\sum_{-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n+\sum_{0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

3. Классификация изолированных особых точек.

- ❖ Точка z_0 - **устранимая** особая точка, если в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в ее окрестности отсутствует главная часть, т.е. $C_{-1}=C_{-2}=C_{-3}=\ldots=C_{-n}=\ldots=0$.
- ❖ В этом случае особенность можно устранить, положив $f(z_0)=C_0$. Тогда полученная функция будет регулярной как в окрестности, так и в самой точке z_0.

Пример:

$f(z)=\dfrac{1-\cos 2z}{2z^2},\quad z_0=0$ – особая

$$f(z)=\frac{1}{2z^2}\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{(2z)^2}{2!}-\frac{(2z)^4}{4!}+\frac{(2z)^6}{6!}-\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{2z^2}\left(2z^2-\frac{2^4}{4!}z^4+\frac{2^6}{6!}z^6-\dots\right)=1-\frac{2^4}{2\cdot 4!}z^2+\frac{2^6}{2\cdot 6!}z^4-\dots,$$

$C_0=1$ главная часть отсутствует.

Функция $\widetilde{f}(z)=\begin{cases}f(z),\ z\neq 0\\ 1,\ z=0\end{cases}$ регулярна везде

❖ **Теорема.** Точка z_0 - устранимая особая точка функции $f(z)\ \Leftrightarrow\ \exists\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=C=const$

Доказательство:

Если z_0 - устранимая, то $\forall n\ C_{-n}=0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{z\to z_0}f(z)=$

$=\lim\limits_{z\to z_0}\left(C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\dots\right)=C_0=const\ \Rightarrow$ Существует конечный предел.

Ч.т.д.

Замечание:

Самостоятельно докажите «в другую сторону». Например, для рассмотренной выше функции $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos 2z}{2z^2}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2\sin^2 z}{2z^2}=1,$ т.е. C_0.

❖ Особая точка z_0 - **полюс** функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана состоит из конечного числа слагаемых. Причем, если $C_{-m}\neq 0,$ а $C_{-m-1}=C_{-m-2}=\dots=0$, то точка z_0 - полюс порядка m.

Пример:

$f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}=\dfrac{1}{z^2}\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dots\right)=\underline{\dfrac{1}{z}}-\dfrac{z}{3!}+\dfrac{z^3}{5!}-\dots\ \Rightarrow\ z_0=0$ - полюс I порядка или <u>простой</u> полюс.

$f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}=\dfrac{1}{z^3}\left(1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^4}{4!}+\dots\right)=\underline{\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{2!z}}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{z}{4!}+\dots\ \Rightarrow\ z_0=0$ – полюс III порядка.

❖ **Теорема.** Точка z_0 - полюс порядка $m\ \Leftrightarrow\ \exists\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$

Доказательство:

z_0 - полюс $\Rightarrow f(z)=\dfrac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dfrac{C_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\dots+C_0+C_1(z-z_0)+\dots$ умножим на $(z-z_0)^m$:

$$f(z)(z-z_0)^m=C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+\dots+C_0(z-z_0)^m+\dots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \exists\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^m\right]=C_{-m}-\text{ конечный}$$

$$(C_{-m}=const)\ \Rightarrow\ \exists\lim_{z\to z_0}f(z)=\frac{C_{-m}}{\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m}=\infty$$

Ч.т.д.

Замечание:

В другую сторону доказать самостоятельно.

❖ Следствие. Если z_0 - полюс порядка m, то $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\left(z-z_0\right)^m}$, где $\varphi(z)$ регулярна в окрестности z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

❖ **Связь между нулем и полюсом.**

Утверждение: Если $f(z)$ регулярна и имеет в z_0 нуль порядка m, то $\dfrac{1}{f(z)}$ имеет в этой точке z_0 полюс m-го порядка.

Доказательство:

Пусть $f(z)=\left(z-z_0\right)^m\varphi\left(z\right)\qquad \varphi\left(z_0\right)\neq 0,\ \varphi\left(z\right)$ регулярна в z_0 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(z)}=\frac{1}{\left(z-z_0\right)^m\varphi\left(z\right)}=\frac{1}{\left(z-z_0\right)^m}\left[C_0+C_1\left(z-z_0\right)+C_2\left(z-z_0\right)^2+\ldots\right]$$

$$\left(\text{т.к. } \frac{1}{\varphi\left(z\right)} \text{ регулярна в } z_0,\text{ следовательно раскладывается в ряд Тейлора}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(z)}=\frac{C_0}{\left(z-z_0\right)^m}+\frac{C_1}{\left(z-z_0\right)^{m-1}}+\ldots \Rightarrow \frac{1}{f(z)} \text{ имеет в } z_0 \text{ полюс порядка } m.$$

Ч.т.д.

❖ Особая точка z_0 функции $f(z)$ называется **существенной** особенностью, если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых.

Пример:

$$f(z)=e^{1/z}=\left\{t=\frac{1}{z}\right\}=e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots=\underbrace{1}_{\substack{\text{правильная}\\\text{часть}}}+\underbrace{\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots}_{\text{глпвная часть}}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ z_0=0-$ существенная особая точка для $f(z)=e^{1/z}$.

❖ **Теорема.** Точка z_0 - существенная особая точка функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда не существует $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ ни конечного, ни бесконечного.

Доказательство:

$\exists\lim\limits_{z\to z_0}f(z)\Leftrightarrow$ устранимая или полюс.

Ч.т.д.

Пример:

$f(z)=e^{1/z}$ (см. выше). Докажем, что $\nexists\lim\limits_{z\to 0}e^{1/z}$. Рассмотрим 2 различных пути, по которым $z\to 0$:

$\gamma_1:\operatorname{Im}z=0,\ \operatorname{Re}z\to 0,\ \operatorname{Re}z>0$
$\gamma_2:\operatorname{Im}z=0,\ \operatorname{Re}z\to 0,\ \operatorname{Re}z<0$ (см. рис. 3.1)

Тогда $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ \text{по } \Gamma_1}}f(z)=\lim\limits_{x\to 0+}e^{1/x}=e^{+\infty}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ \text{по } \Gamma_2}}f(z)=\lim\limits_{x\to 0-}e^{1/x}=e^{-\infty}=0$

По γ_1 и γ_2 пределы разные, следовательно $\nexists\lim\limits_{z\to 0}e^{1/z}$.

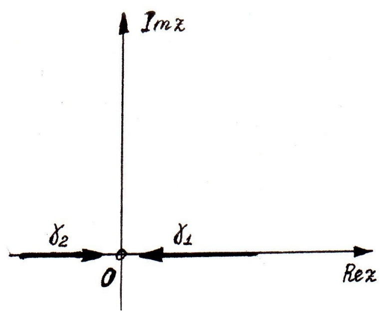


рис. 3.1.

Вычеты.

1. Определение вычета.

1. Определение.

Пусть z_0 - изолированная особая точка функции $f(z)$, $z_0 \neq \infty$, а γ - контур, содержащий точку z_0 внутри себя (и только ее одну!) – см. рис. 1.1.1.

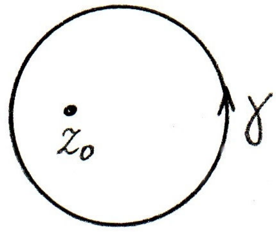


рис. 1.1.1.

Тогда **вычетом функции** $f(z)$ в точке z_0 называется число

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz}$$

2. Связь вычета с коэффициентом ряда Лорана.

Т.к. z_0 - изолированная особая точка, то существует ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$ в окрестности $\mathring{U}(z_0)$, коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma:|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Рассмотрим $n = -1 \Rightarrow n+1 = 0 \Rightarrow (z-z_0)^{n+1} = 1$. Тогда $C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma:|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)dz}{1} = \operatorname*{res}_{z_0} f(z)$.

Отсюда следует **второе определение вычета**:

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = C_{-1}}$$

2. Вычисление вычетов.

1. Если z_0 - существенно особая точка, то вычет вычисляется только как C_{-1}.

Пример:

$$f(z) = ze^{2/z^2} = z\left(1 + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{2!z^4} + \ldots\right) = z + \frac{2}{z} + \underbrace{\frac{2^2}{2!z^3} + \ldots}_{\text{главная часть}} \Rightarrow C_{-1} = 2 \Rightarrow \operatorname*{res}_0 f(z) = 2$$

2. Если z_0 - устранимая особая точка, то вычет равен нулю, т.к. для устранимой особенности $\forall C_{-n} = 0$, в том числе и $C_{-1} = 0$.

Пример:

$f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z}$. Особые точки этой функции: $z_0 = 0;\ z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Найдем вычет в z_0. Т.к. $\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{tg} z}{z} = 1 \neq \infty \Rightarrow z_0 = 0$ - устранимая $\Rightarrow C_{-1} = 0 \Rightarrow \operatorname*{res}_0 f(z) = 0$.

3. Вычисление вычета в простом полюсе.

Теорема 1. Вычисление вычета в простом полюсе C с помощью предела.

Если z_0 - простой полюс (полюс I порядка) функции $f(z)$, то

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0)}$$

Доказательство:

z_0 - простой полюс, следовательно, в главной части ряда Лорана содержится одно слагаемое, следовательно:

$$f(z)=\frac{C_{-1}}{z-z_0}+C_0+C_1\left(z-z_0\right)+C_2\left(z-z_0\right)^2+\ldots$$

$$f\left(z\right)\cdot\left(z-z_0\right)=C_{-1}+C_0\left(z-z_0\right)+C_1\left(z-z_0\right)^2+C_2\left(z-z_0\right)^3+\ldots$$

$$\lim_{z\to z_0}\left[f\left(z\right)\cdot\left(z-z_0\right)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[C_1+C_0\left(z-z_0\right)+C_1\left(z-z_0\right)^2+C_2\left(z-z_0\right)^3+\ldots\right]=C_{-1}=\operatorname*{res}_{z_0}f(z)$$

Ч.т.д.

Пример:

$f(z)=\dfrac{z}{(z-1)}$. Т.к. $z_0=1$ - нуль первого порядка знаменателя, следовательно, $z_0=1$ - простой полюс $f(z)$, следовательно $\operatorname*{res}_{z_0=1}f(z)=\lim\limits_{z\to 1}\left(\dfrac{z}{z-1}\cdot(z-1)\right)=\lim\limits_{z\to 1}z=1$

Проверим результат с помощью ряда Лорана:

$$f(z)=\frac{z-1+1}{z-1}=\underbrace{1}_{\text{пр. чать}}+\underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{главная часть}}\Rightarrow C_{-1}=1$$

Теорема 2. Вычисление вычета в простом полюсе с помощью производной.

Если z_0 - простой полюс функции $f(z)$, имеющий вид $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0,\ \psi(z_0)=0,\ \psi'(z_0)\neq 0$ (т.е. z_0 - нуль первого порядка знаменателя), то

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z_0}f(z)=\operatorname*{res}_{z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}$$

Доказательство:

Из Теоремы 1 следует:

$$\operatorname*{res}_{z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{(z-z_0)}}=(\text{т.к. }\psi(z_0)=0)=\lim_{\substack{z\to z_0\\(\Delta z\to 0)}}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\Delta\psi(z)}{\Delta z}}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)}{\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta\psi(z)}{\Delta z}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Ч.т.д.

Пример:

$f(z)=\dfrac{z+3}{\sin z}$. Точки $z_k=\pi k$ - простые полюса $\left(k=0;\pm1;\pm2;\ldots\right)$, т.к.

$$\sin z_k=0,\ \left(\sin z\right)'=\cos z\ \Rightarrow\ \cos z_k\neq 0\ \Rightarrow\ \operatorname*{res}_{z_k}f(z)=\frac{z_k+3}{\cos z_k}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \operatorname*{res}_{2\pi n}f(z)=\frac{2\pi n+3}{\cos 2\pi n}=2\pi n+3;\ \text{например, }\operatorname*{res}_{0}f(z)=3$$

$$\operatorname*{res}_{(2n+1)\pi}f(z)=\frac{\left(2n+1\right)\pi+3}{\cos\left((2n+1)\pi\right)}=-\left(2n+1\right)\pi-3;\ \text{например, }\operatorname*{res}_{\pi}f(z)=-\left(\pi+3\right)$$

4. Вычисление вычета в кратном полюсе.

Теорема 3. Вычисление вычета в кратном полюсе с помощью предела.

Если z_0 - полюс порядка n для функции $f(z)$, то

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z_0}f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^n\right]^{(n-1)}}$$

В частности, для полюса 2-го порядка получим:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^2 \right]'$$

Для полюса 3-го порядка получим:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^3 \right]''$$

Доказательство:

Ряд Лорана в окрестности полюса порядка n имеет вид:

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{C_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z)(z-z_0)^n = C_{-n} + C_{-n+1}(z-z_0) + \ldots + C_{-1}(z-z_0)^{n-1} + C_0(z-z_0)^n + C_1(z-z_0)^{n+1} + \ldots$$

В правой части полученного равенства только неотрицательные степени $(z-z_0)$, следовательно, это функция, регулярная в z_0 и ее окрестности. Обозначим ее через $\varphi(z)$. Тогда:

$$f(z)(z-z_0)^n = \varphi(z) \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n} \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\rho}\frac{\varphi(z)dz}{(z-z_0)^n} =$$

$$\{\text{по интегральной формуле Коши для производных}\} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2\pi i}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(z_0) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\varphi^{(n-1)}(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^n \right]^{(n-1)}$$

Ч.т.д.

Пример:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}; \quad z_0 = 1 \text{ - полюс 3-го порядка.}$$

$$\operatorname*{res}_{1} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}\cdot(z-1)^3\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[e^{2z}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[2\cdot 2\cdot e^{2z}\right] = 2e^2$$

Замечание:

В тех случаях, когда разложение в ряд Лорана не вызывает затруднений, проще, по определению, найти C_{-1}.

Пример:

$$f(z) = \frac{2+z^3}{z^7(3+z)}; \quad \begin{aligned} &z_1 = -3 \text{ - простой полюс} \\ &z_2 = 0 \text{ - полюс 7-го порядка} \end{aligned}$$

$$\operatorname*{res}_{-3} f(z) = \lim_{z\to -3}\left[\frac{2+z^3}{z^7(3+z)}\cdot(z+3)\right] = \frac{2-27}{(-3)^7} = \frac{25}{3^7}.$$

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = \frac{1}{6!}\lim_{z\to 0}\left[\frac{2+z^3}{z^7(3+z)}\cdot z^7\right]^{\mathrm{VI}} = \ldots$$

Чем вычислять производную шестого порядка, лучше разложим $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z:

$$f(z) = \frac{2+z^3}{z^7}\cdot\frac{1}{3+z} = \left(\frac{2}{z^7}+\frac{1}{z^4}\right)\cdot\frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \left(\frac{2}{3z^7}+\frac{1}{3z^4}\right)\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}-\frac{z^3}{3^3}+\frac{z^4}{3^4}-\frac{z^5}{3^5}+\frac{z^6}{3^6}-\ldots\right) =$$

$$= \ldots\frac{2}{3z^7}\cdot\frac{z^6}{3^6}+\ldots+\frac{1}{3z^4}\cdot\left(-\frac{z^3}{3^3}\right)+\ldots = \left(\frac{2}{3^7}-\frac{1}{3^4}\right)\frac{1}{z}+\ldots \quad \Rightarrow \quad C_{-1} = \operatorname*{res}_{0} f(z) = \frac{2}{3^7}-\frac{1}{3^4}$$

3. Особенности в бесконечности.

Пусть $f(z)$ - регулярна в окрестности бесконечно удаленной точки, кроме нее самой, т.е. в области $R<|z|<+\infty$. В такой окрестности сходится ряд Лорана вида $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$. Этот ряд может принимать следующие формы:

1) $f(z)=C_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n}$ (не содержит положительных степеней)

Тогда существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\left(C_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n}\right)=C_0$.

$C_0\neq\infty \quad\Rightarrow\quad z_0=\infty$ - устранимая особая точка.

<u>Пример:</u>

$f(z)=\frac{z^2+z+2}{z^2}=1+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}$

У этой функции 2 особенности:

$z_1=\infty$ - устранимая $\left(\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=1\right)$

$z_2=0$ - полюс 2-го порядка ($\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\infty$, в главной части ряда Лорана содержатся степени z до минус второй).

2) $f(z)=C_m z^m+C_{m-1}z^{m-1}+\ldots+C_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n}$ (конечное число слагаемых с положительными степенями z)

Тогда существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\left(C_m z^m+\ldots+C_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n}\right)=\infty \quad\Rightarrow\quad z_0=\infty$ - полюс. Порядок полюса определяется по высшей положительной степени z.

<u>Пример:</u>

$f(z)=\frac{z^6}{1-z^3}$

У этой функции 3 конечных особых точки (нули знаменателя – полюса 1-го порядка) и особенность в $z=\infty$. Разложим $f(z)$ в ряд по степеням z в окрестности бесконечности:

$f(z)=\frac{z^6}{z^3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z^3}-1}=-z^3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^3}}=-z^3\left(1+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^9}+\ldots\right)=-z^3-1-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^6}-\ldots \quad\Rightarrow\quad z=\infty$ - полюс 3-го порядка.

3) $f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{0} C_n z^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ (бесконечное число слагаемых с положительными степенями)

Тогда в $z_0=\infty$ - существенная особенность.

<u>Пример:</u>

$f(z)=\frac{1}{z^2}+e^{-2z}$ имеет две особые точки: в $z_1=0$ - полюс 2-го порядка, в $z_2=\infty$ - существенную особенность.

4. Основная теорема о вычетах.

1. Основная теорема о вычетах.

Теорема 4.

Пусть $f(z)$ регулярна в конечной односвязной области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, а γ - замкнутая кривая, лежащая в D и содержащая $z_1, z_2, ..., z_n$ внутри себя (см. рис. 4.1.1). Тогда:

$$\boxed{\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z)}$$

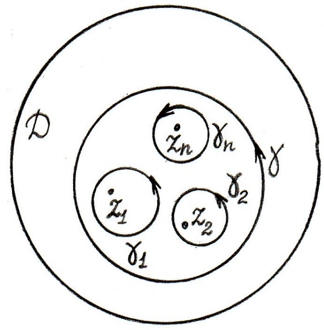


рис. 4.1.1.

<u>Доказательство:</u>

Из теоремы Коши для многосвязной области следует:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{\gamma_2} f(z)dz + ... + \oint_{\gamma_n} f(z)dz = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z_2} f(z) + ... + \operatorname*{res}_{z_n} f(z)\right] = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z).$$

Ч.т.д.

<u>Пример (задача из Типового расчета):</u>

Вычислить: $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$.

γ: а) γ_1: $|z| = 1$; б) γ_2: $|z| = 3$; в) γ_3: $|z| = 5$; г) γ_4: $|z-2| = \frac{1}{2}$;

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z+2)(z+4)} = \frac{1}{8};$$

$$\operatorname*{res}_{-2} f(z) = \lim_{z\to -2} \frac{1}{z(z+4)} = -\frac{1}{4};$$

$$\operatorname*{res}_{-4} f(z) = \lim_{z\to -4} \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{8};$$

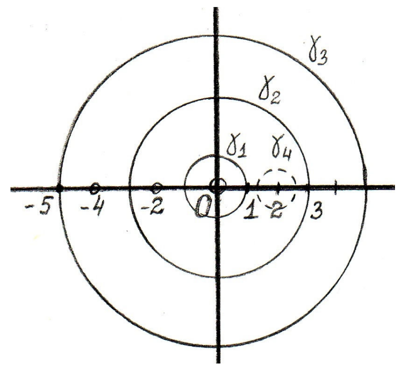


рис. 4.1.2.

Тогда:

а) $\oint_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{0} f(z) = \frac{2\pi i}{8} = \frac{\pi i}{4}$;

б) $\oint_{\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{0} f(z) + \operatorname*{res}_{-2} f(z)\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = -\frac{\pi i}{4}$;

в) $\oint_{\gamma_3} f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{0} f(z) + \operatorname*{res}_{-2} f(z) + \operatorname*{res}_{-4} f(z)\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 0$;

г) $\oint_{\gamma_4} f(z)dz = 0$, т.к. внутри γ_4 $f(z)$ регулярна.

2. Вторая теорема о вычетах.

Теорема 5. О полной сумме вычетов.

Пусть $f(z)$ регулярна в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ за исключением конечного числа изолированных особых точек, считая точку $z = \infty$. Тогда:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) = 0}$$

$z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ - конечные особые точки $f(z)$,

z_n - бесконечная точка.

Доказательство:

Возьмем такую большую окружность, чтобы все особые точки, кроме ∞, лежали внутри. Назовем ее C_R (см. рис. 4.2.2):

$$C_R: \quad |z| = R \quad \Rightarrow \quad \oint_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) = -\oint_{C_R} f(z)dz = -2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\infty} f(z)$$

$$\left(\underline{\text{т.к. вычет в бесконечности: } \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(z)dz} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) + 2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0$$

Ч.т.д.

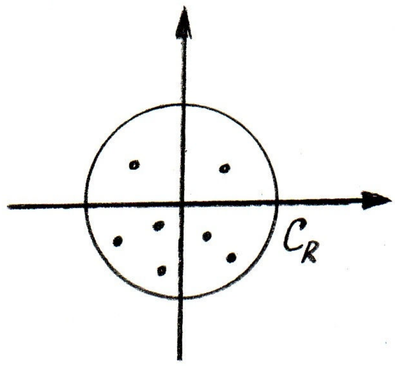


рис. 4.2.2.

3. Вычисление контурных интегралов.

Теорема о полной сумме вычетов облегчает вычисление контурных интегралов.

Пример:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z\left(z^4+1\right)} = J = ?$$

$$\frac{1}{z\left(z^4+1\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{z^4+1} = \frac{1}{z}\left(1 - z^4 + z^8 - \ldots\right) = \frac{1}{z} - z^3 + z^7 - \ldots \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{res}_{0} f(z) = 1;$$

$$\frac{1}{z\left(z^4+1\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{z^5} \cdot \frac{1}{1 + 1/z^4} = \frac{1}{z^5}\left(1 - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^8} - \ldots\right) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^9} + \frac{1}{z^{11}} - \ldots =$$

$$= \left\{|z| > 1\right\} = t^5 - t^9 + t^{11} - \ldots, \text{ где } \begin{matrix} t = \dfrac{1}{z} \\ t = 0 \leftrightarrow z = \infty \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0$$

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) + \operatorname*{res}_{z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z_2} f(z) + \operatorname*{res}_{z_3} f(z) + \operatorname*{res}_{z_4} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) + \sum_{k=1}^{4} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) = -\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad J = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

Применение вычетов к вычислению интегралов.

1. Интегралы по неограниченным путям интегрирования.

Пусть Г – неограниченная гладкая кривая (гладкий путь) – см. рис. 1.1.

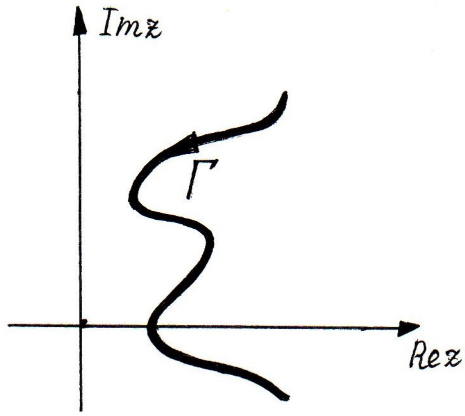


рис. 1.1.

Определение.

$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz$,

где Γ_R - часть пути, лежащая внутри окружности C_R радиуса $\boldsymbol{R}$ с центром в точке $\boldsymbol{O}$ (см. рис. 1.2).

Теорема.

1) Пусть $\boldsymbol{f(z)}$ регулярна в $\boldsymbol{D}$, ограниченной $\boldsymbol{\Gamma}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$ и существует $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$.

2) $\lim\limits_{R\to\infty}\left[R\cdot\max\limits_{C_R}|f(z)|\right] = 0$.

1), 2) $\Rightarrow$ $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{z_k} f(z)$ (т.е. применима теорема о вычетах).

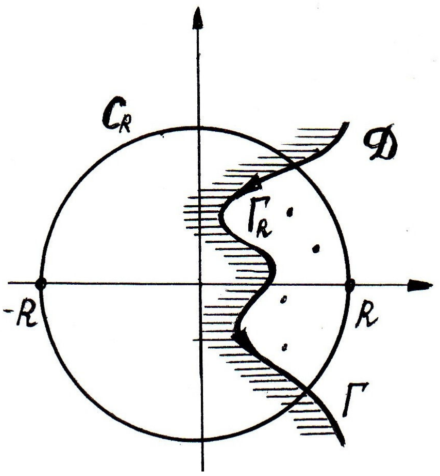


рис. 1.2.

Доказательство:

Возьмем достаточно большое $\boldsymbol{R}$, чтобы все z_k лежали внутри контура $\gamma = \Gamma_R + C_R$. Тогда:

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z).$$

Следовательно, $\oint\limits_{\Gamma_R + C_R} f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{z_k} f(z)$ не зависит от $\boldsymbol{R}$. Следовательно,

$$\lim_{R\to\infty}\oint\limits_{\Gamma_R + C_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)dz + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z).$$

Первое слагаемое получено по определению. Докажем, что второе слагаемое равно нулю. Рассмотрим $\lim\limits_{R\to\infty}\left|\int\limits_{C_R} f(z)dz\right| = \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}|f(z)||dz| \le \lim\limits_{R\to\infty}\max\limits_{C_R}|f(z)|\cdot 2\pi R = 2\pi\cdot 0 = 0$ (использовалась теорема об оценке определенного интеграла и условие 2) теоремы). Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z).$$

Ч.т.д.

Следствие:
(вычисление интегралов по вещественной оси от дробно-рациональных функций)

1) Пусть $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_k(x)}$ - рациональная дробь.

2) $k - m \ge 2$ (степень числителя по крайней мере на 2 меньше степени знаменателя).

3) $Q_k(x)$ не имеет нулей на вещественной оси.

1), 2), 3) $\Rightarrow$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_k(x)}dx = 2\pi i \sum\limits_{p=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z_p} \frac{P_m(z)}{Q_k(z)}$ по всем z_p - особенностям, лежащим в верхней полуплоскости ($z_p \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$)

<u>Доказательство следствия:</u>

$$k - m \ge 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} \le \frac{A}{x^2} \quad (A = \text{const}) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)dx}{Q(x)} \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Adx}{x^2}.$$

Следовательно, интеграл сходится по признаку сравнения несобственных интегралов I-го рода.

Пусть $\Gamma_R = (-R; +R)$, а $\Gamma = (-\infty; +\infty)$ - см. рис. 1.3. Тогда $R\max\limits_{C_R}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \le R\max\limits_{C_R}\frac{|A|}{|z|^2} = R\cdot\frac{|A|}{R^2} = \frac{|A|}{R}$ (т.к. на C_R $|z| = R$).

Следовательно, $\lim\limits_{R\to\infty} R\max\limits_{C_R}|f(z)| = \lim\limits_{R\to\infty}\frac{|A|}{R} = 0$, т.е. условия теоремы выполнены, и отсюда следует:

$$\underbrace{\int\limits_{\Gamma}\frac{P(z)dz}{Q(z)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)dx}{Q(x)}}_{\text{т.к. на }\Gamma:\ z\equiv x} = 2\pi i\sum \operatorname*{res}\limits_{z_p}\frac{P(z)}{Q(z)},$$ где z_p внутри $\boldsymbol{D}$, т.е. в верхней полуплоскости.

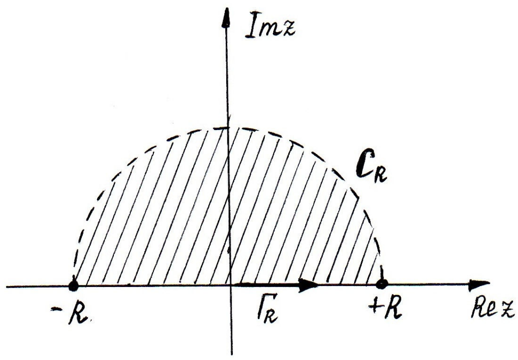


рис. 1.3.

Ч.т.д.

<u>Примеры:</u>

1)

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\left(\operatorname*{res}\limits_{i} f(z) + \operatorname*{res}\limits_{2i} f(z)\right) = \pi i\cdot\left(\frac{i}{6}-\frac{i}{3}\right) = \pi i\cdot\left(-\frac{i}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\left(\frac{\pi}{6}\in\mathbb{R},\quad \frac{\pi}{6}>0\right)$$

$$\operatorname*{res}\limits_{i} f(z) = \lim\limits_{z\to i}\frac{z^2}{(z^2+i)(z^2+4)} = -\frac{1}{3\cdot 2i} = \frac{i}{6};$$

$$\operatorname*{res}\limits_{2i} f(z) = \lim\limits_{z\to 2i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+2i)} = \frac{-1}{-3i} = -\frac{i}{3};$$

т.к. $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{2i}$ – простые полюса.

Покажем преимущество такого решения перед «обычным»:

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \quad \Rightarrow$$

$$(Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1) = x^2$$

$$\begin{matrix} x^3: & A+C=0 \\ x^1: & 4A+C=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad A=C=0 \qquad \begin{matrix} x^2: & B+D=1 \\ x^0: & 4B+D=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} B=-1/3 \\ D=4/3 \end{matrix}$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{-1/3}{x^2+1}dx + \int\limits_0^{+\infty}\frac{4/3}{x^2+4}dx = \left(-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

2)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4x+13)^2} = 2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z_0} f(z) = 2\pi i\cdot\frac{2}{6^3\cdot i} = \frac{\pi}{54}$$

Нули знаменателя:

$z^2+4z+13=0$

$z=-2\pm\sqrt{4-13}=-2\pm 3i$

$z_0=-2+3i$ принадлежит верхней полуплоскости

z_0 - полюс II-го порядка

$$\underset{z_0}{\operatorname{res}} f(z)=\lim_{z\to-2+3i}\left(\frac{1}{(z+2+3i)^2}\right)'=\left.\frac{-2}{(z+2+3i)^3}\right|_{z=z_0}=\frac{-2}{6^3\cdot i^3}=\frac{2}{6^3\cdot i}$$

2. Лемма Жордана.

Формулировка леммы:

1) $f(z)$ – регулярна в верхней полуплоскости $(\operatorname{Im} z\ge 0)$ за исключением конечного числа изолированных особых точек.

2) $\max\limits_{C_R}|f(z)|\to 0$ при $R\to\infty$, где C_R - полуокружность радиуса R с центром в точке $z=0$, лежащая в верхней полуплоскости.

1), 2) $\Rightarrow\quad \forall\lambda>0\quad \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)e^{i\lambda z}dz=0$.

Следствие:

(вычисление интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cdot\begin{Bmatrix}\cos\lambda x\\ \sin\lambda x\end{Bmatrix}dx$)

Пусть $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_k(x)}$ - правильная дробь ($m<k$), $Q(x)\ne 0$ на вещественной оси и $z_1,z_2,\dots,z_n$ - нули $Q(z)$ в верхней полуплоскости. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{i\lambda x}dx=2\pi i\sum\limits_{p=1}^{n}\underset{z_p}{\operatorname{res}}R(z)e^{i\lambda z}$, а т.к. $e^{i\lambda x}=\cos\lambda x+i\sin\lambda x$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos\lambda x dx=\operatorname{Re}\left[2\pi i\sum\operatorname{res}R(z)e^{i\lambda z}\right]$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\operatorname{Im}\left[2\pi i\sum\operatorname{res}R(z)e^{i\lambda z}\right]$.

Доказательство следствия:

Возьмем контур, как на рис. 2.1.

$\int\limits_{-R}^{+R}R(z)e^{i\lambda z}dz+\int\limits_{C_R}R(z)e^{i\lambda z}dz=2\pi i\sum\limits_{p=1}^{n}\underset{z_p}{\operatorname{res}}R(z)e^{i\lambda z}$ не зависит от R при $R\to\infty$.

В силу леммы

$\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}R(z)e^{i\lambda z}dz=0,$ т.к. $\max\limits_{C_R}|R(z)|\le\dfrac{A}{R}\to 0$ при $R\to\infty$

(т.к. дробь правильная)

$\Rightarrow\quad \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{+R}R(z)e^{i\lambda z}dz=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{i\lambda x}dx=2\pi i\sum\operatorname{res}R(z)e^{i\lambda z}$

(т.к. на вещественной оси $z\equiv x$)

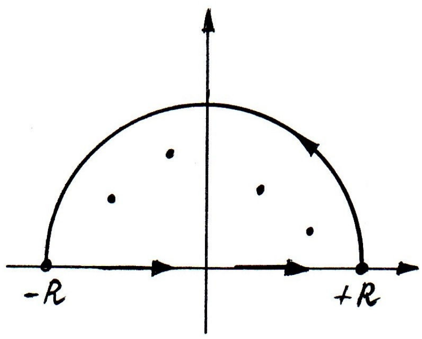


рис. 2.1

Ч.т.д.

Примеры:

1)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx=\left(\text{в силу четности}\right)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx+\underbrace{\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^2+b^2}dx}_{=0}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax+i\sin ax}{x^2+b^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+b^2}dx=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{bi}\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}=\pi i\cdot\left.\frac{e^{iaz}}{z^2+bi}\right|_{z=bi}=\pi\cancel{i}\cdot\frac{e^{ia\cdot bi}}{2b\cancel{i}}=\underline{\frac{\pi}{2b}e^{-ab}}$$

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^3+1\right)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx=\frac{\pi}{8}\left(\frac{9}{e^3}-\frac{1}{e}\right)$$

Рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3+1}{x^4+10x^2+9}e^{ix}dx=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{i}R(z)e^{iz}+\operatorname*{res}_{3i}R(z)e^{iz}\right)=$$

$$t^2+10t+9=0\quad\Leftrightarrow\quad t=-1,t=-9\quad\Leftrightarrow\quad\begin{matrix}x^2=-1 & x=\pm i\\ x^2=-9 & x=\pm 3i\end{matrix}$$

$$=2\pi i\left[\frac{-27i+1}{-8\cdot 3\cdot 2i}e^{-3}+\frac{-i+1}{2i\cdot 8}e^{-1}\right]=\pi\underbrace{\left[\frac{-27i+1}{-24}e^{-3}+\frac{-i+1}{8}e^{-1}\right]}_{z_0=a_0+ib_0}$$

$$\operatorname*{res}_{i}\lim_{z\to i}\frac{z^3+1}{\left(z+i\right)\left(z^2+a\right)}e^{iz}=\frac{-i+1}{2i\cdot 8}e^{-1};$$

$$\operatorname*{res}_{3i}\lim_{z\to 3i}\frac{z^3+1}{\left(z+1\right)\left(z^2+3i\right)}e^{iz}=\frac{-27i+1}{-6i\cdot 8}e^{-3};$$

$$\operatorname{Re}(z_0)=\pi\cdot\left(\frac{e^{-3}}{-24}+\frac{e^{-1}}{8}\right)=\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{3e^3}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos xdx$$

$$\operatorname{Im}(z_0)=\pi\cdot\left(\frac{-27}{-24}e^{-3}+\frac{1}{8}e^{-1}\right)=\frac{\pi}{8}\left(\frac{9}{e^3}-\frac{1}{e}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\sin xdx$$

Ответ: $\frac{\pi}{8}\left(\frac{9}{e^3}-\frac{1}{e}\right)$.

3. Вычисление интегралов вида $\int_0^{2\pi}R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ с помощью вычетов.

Пусть $R(u,v)$ - рациональная функция двух переменных. Пусть $u=\sin x,\quad v=\cos x$. Произведем замену $z=e^{ix}$. Тогда:

$$dz=ie^{ix}dx\quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{idz}{z};\quad\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2};\quad\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}.$$

Если x изменяется от 0 до 2π, то $z=e^{ix}$ движется по окружности $|z|=1$ против часовой стрелки и

$$\int_0^{2\pi}R\left(\sin x,\cos x\right)dx=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2};\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\left(-\frac{idz}{z}\right).$$

Пример:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5+4\sin x}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+4\cdot\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}}\cdot\left(-\frac{i}{z}\right)dz=\oint_{|z|=1}\frac{2i\cdot\left(-\frac{i}{z}\right)dz}{10i+4\cdot\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}=\oint_{|z|=1}\frac{2dz}{10iz+4z^2-4}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2+5iz-2}=$$

$z_{1,2}=\frac{-5i\pm 3i}{4};\quad z_1=-2i;\quad z_2=-\frac{i}{2}$ - лежит внутри контура.

$$=2\pi i\operatorname*{res}_{-\frac{i}{2}}\frac{1}{2z^2+5iz-2}=2\pi i\cdot\left.\frac{1}{4z+5i}\right|_{z=-\frac{i}{2}}=2\pi i\cdot\frac{1}{-\frac{4i}{2}+5i}=\frac{2\pi i}{3i}=\frac{2\pi}{3}$$

4. Принцип аргумента.

Пусть $f(z)$ регулярна в $D\bigcup\Gamma_D$ за исключением конечного числа полюсов $z_1, z_2, ..., z_n$, лежащих в D (но не на Γ_D) и на Γ: $f(z)\neq 0$.

Определение.

Функция $\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\left[\ln f(z)\right]'$ называется **логарифмической производной.**

Функция $\operatorname*{res}_{z_k}\frac{f'(z)}{f(z)}$ называется **логарифмическим вычетом,** где z_k - все особые точки $\varphi(z)$, т.е. $a_1, a_2, ..., a_m$ - полюса $f(z)$ и $b_1, b_2, ..., b_p$ - нули $f(z)$.

$z_k=\left\{a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_p\right\}$.

$\operatorname*{res}_{z_k}\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ - логарифмический вычет $f(z)$ относительно контура Γ.

Теорема.

Если $f(z)$ имеет в точке $z=z_0$ нуль порядка n или полюс порядка k, то логарифмическая производная $\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$ имеет в этой точке простой полюс и вычет в нем равен: $\operatorname*{res}_{z_0}\frac{f'(z)}{f(z)}=n$ (в случае нуля), либо $\operatorname*{res}_{z_0}\frac{f'(z)}{f(z)}=-k$ (в случае полюса).

Доказательство:

а) $f(z)$ имеет в z_0 нуль порядка n. Следовательно:

$$f(z)=(z-z_0)^n f_1(z),\quad f_1(z_0)\neq 0\quad\Rightarrow\quad \ln f(z)=n\ln(z-z_0)+\ln f_1(z)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\varphi(z)=\left(\ln f(z)\right)'=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z-z_0}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\quad\left(f_1(z_0)\neq 0\right)\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow\quad\varphi(z)$ имеет в z_0 простой полюс и $C_{-1}=n$.

б) $f(z)$ имеет в z_0 полюс порядка k. Следовательно:

$$f(z)=\frac{f_2(z)}{\left(z-z_0\right)^k}\quad\Rightarrow\quad\ln f(z)=\ln f_2(z)-k\ln\left(z-z_0\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{f_2'(z)}{f_2(z)}-\frac{k}{\left(z-z_0\right)}\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в z_0 простой полюс и $C_{-1}=-k$.

Ч.т.д.

Теорема.

Если ***f***(***z***) регулярна в $D\bigcup\Gamma_D$ за исключением конечного числа полюсов и $f(z)\neq 0, \neq\infty$ на Γ_D, то:

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\Gamma_D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N-P,$$

где $N=\sum n_k$ - число нулей ***f***(***z***) с учетом их кратности, $P=\sum p_k$ - число полюсов ***f***(***z***) с учетом их порядка.

<u>Доказательство:</u>

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\Gamma_D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\cdot\sum\operatorname{res}\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum\operatorname{res}\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum\operatorname{res}_{a_k}\frac{f'(z)}{f(z)} + \sum\operatorname{res}_{b_k}\frac{f'(z)}{f(z)} =$$

первое слагаемое - вычет по всем полюсам, второе - по нулям функции $f(z)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ = -\sum p_k + \sum n_k = N-P.$

Ч.т.д.

<u>Пример:</u>

Найти логарифмический вычет функции

$f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{\left(z^3+8\right)\left(z+4\right)}$ относительно контура $|z|=3$.

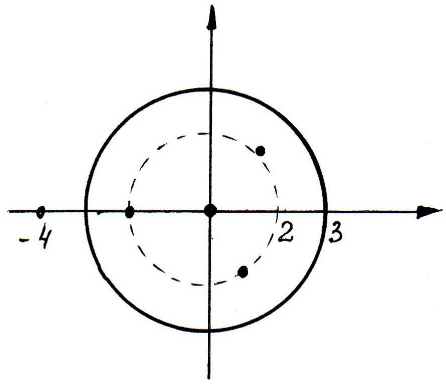
$z_0=0$ - нуль кратности 2.

$z_{1,2,3}=\sqrt[3]{-8}$ - простые полюса.

Другие нули и полюса ***f***(***z***) не лежат внутри контура.

Следовательно:

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{|z|=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2-3=-1$$



Геометрический смысл теоремы о логарифмическом вычете (принцип аргумента):

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg f(z) = N-P,$$

$\Delta_\Gamma\arg f(z)$ - приращение аргумента при обходе точкой ***z*** контура ***Г*** один раз в положительном направлении.

Итак, логарифмический вычет равен числу полных оборотов вокруг нуля вектора $w=f(z)$, когда ***z*** описывает контур ***Г*** в положительном направлении и равен ***N – P***. Отсюда, в частности, следует, что если ***f***(***z***) регулярна внутри ***Г*** (т.е. $P=0$), то она содержит столько нулей, сколько раз вектор $w=f(z)$ проделает полный оборот вокруг начала координат, когда ***z*** пройдет весь контур ***Г***.

Теорема Руше:

Пусть ***f***(***z***) и ***g***(***z***) регулярны в ограниченной односвязной области ***D*** и на ее границе Γ_D, и пусть $\forall z\in\Gamma_D \Rightarrow |f(z)|>|g(z)|$. Тогда ***f***(***z***) и $F(z)=g(z)+f(z)$ имеют в ***D*** одинаковое число нулей.

Следствие (Основная теорема алгебры):

Многочлен степени n $P_n(z)=a_0z^n+\ldots+a_{n-1}z+a_n,\quad a_0\neq 0$ имеет ровно ***n*** нулей (с учетом их кратности).

<u>Пример:</u>

Найти число нулей уравнения $z^{11}-7z^6+3z-1=0$ в кольце: $1\le|z|\le 2$.

Решение:

а) в круге $|z| \le 1;\quad \gamma_1 : |z| = 1$

$f(z) = -7z^6$

$g(z) = z^{11} + 3z - 1$

$|f(z)|\Big|_{\gamma_1} = 7;\quad |g(z)|\Big|_{\gamma_1} \le 1+3+1 = 5 \quad\Rightarrow\quad |f(z)| > |g(z)| \quad\Rightarrow$

у $f(z)+g(z)$ нулей столько же, сколько у $f(z) = -7z^6 \quad\Rightarrow\quad N_1 = 6$

б) в круге $|z| \le 2;\quad \gamma_2 :\quad |z| = 2$

в) в кольце количество нулей $N = N_2 - N_1 = 11 - 6 = 5$.

Ответ: 5 нулей.

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ.

Интегралы, зависящие от параметра.

1. Собственные интегралы от параметра.

Пусть $f(x,\alpha)$ непрерывна на прямоугольнике **G** и $\forall\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$ существует определенный (собственный) интеграл по переменной $x\in[a,b]$ (см. рис. 1.1):

$$\int_a^b f(x,\alpha)dx,$$

который является функцией параметра α, т.е.:

$$J(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx.$$

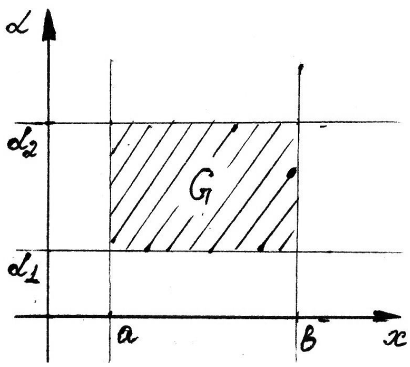


рис. 1.1.

Теорема 1.
Если $f(x,\alpha)$ непрерывна на *G*, то $J(\alpha)$ непрерывна на отрезке $[\alpha_1,\alpha_2]$.

Замечание:
Условия теоремы 1 являются достаточными, но не являются необходимыми.

Пример:

1. Доказать, что $J(\alpha)=\int_0^1 \operatorname{sgn}(x-\alpha)dx$ непрерывна на множестве $\alpha\in\mathbb{R}$.

Решение:

Функция $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ - разрывная.

Пусть $\alpha<0$: $\operatorname{sgn}(x-\alpha)=1$, т.к. $x\in[0,1]$ $\Rightarrow$ $x-\alpha>0$ $\Rightarrow$ $J(\alpha)=\int_0^1 dx=1$.

Пусть $\alpha>1$: $\operatorname{sgn}(x-\alpha)=-1$, т.к. $x-\alpha<0$ $\Rightarrow$ $J(\alpha)=\int_0^1(-dx)=-1$.

Пусть $0\le\alpha\le1$: $J(\alpha)=\int_0^\alpha \operatorname{sgn}\underbrace{(x-\alpha)}_{<0}dx+\int_\alpha^1 \operatorname{sgn}(x-\alpha)dx=$

$\int_0^\alpha(-dx)+\int_\alpha^1 dx=-\alpha+1-\alpha=1-2\alpha.$

Итак, $J(\alpha)=\begin{cases}-1, & \alpha>1\\ 1-2y, & 0\le\alpha\le1\\ 1, & \alpha<0\end{cases}$ - непрерывна (см. рис. 1.2).

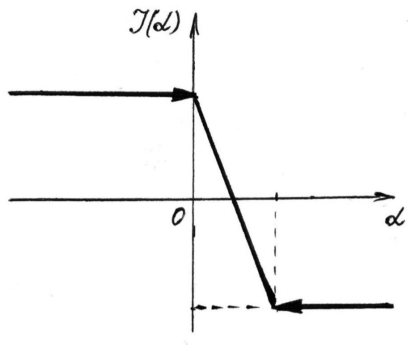


Рис. 1.2.

Хотя интегрируемая функция разрывная, $J(\alpha)$ - непрерывна!

Теорема 2.

Пусть функция $f(x,\alpha)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывны на ***G***. Следовательно, $\forall\,\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]\ \Rightarrow\ J'(\alpha)=\int\limits_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$.

Теорема 3 (обобщение теоремы 2).

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx\right]=f[\psi(\alpha),\alpha]\cdot\psi'(\alpha)-f[\varphi(\alpha),\alpha]\cdot\varphi'(\alpha)+\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

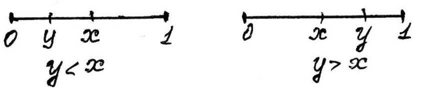
<u>Пример:</u>

Доказать, что функция $u(x)=\int\limits_0^1 \mathrm{K}(x,y)\cdot v(y)dy$, где $\mathrm{K}(x,y)=\begin{cases}x\cdot(1-y),\ x\le y\\ y\cdot(1-x),\ x>y\\ x\in[0,1]\end{cases}$ удовлетворяют уравнению: $u''(x)=-v(x)$.

<u>Решение:</u>

$$u(x)=\int\limits_0^x+\int\limits_x^1=\int\limits_0^x \mathrm{K}(x,y)\cdot v(y)dy+\int\limits_x^1 \mathrm{K}(x,y)\cdot v(y)dy=\int\limits_0^x y\cdot(1-x)\cdot v(y)dy+\int\limits_x^1 x\cdot(1-y)\cdot v(y)dy=$$

$$=(1-x)\cdot\int\limits_0^x y\cdot v(y)dy+x\int\limits_x^1 v(y)\cdot(1-y)\,dy.$$



Вычислим производные, используя формулу производной произведения:

$$u'(x)=-1\cdot\int\limits_0^x y\cdot v(y)dy+(1-x)\cdot[x\cdot v(x)-0]+\int\limits_x^1 v(y)\cdot(1-y)\,dy+x\cdot[0-x\cdot(1-x)]=$$

$$=-\int\limits_0^x y\cdot v(y)dy+\int\limits_x^1 v(y)\cdot(1-y)\,dy;$$

$$u''(x)=-[x\cdot v(x)-0]+[0-v(x)\cdot(1-x)]=-x\cdot v(x)-v(x)\cdot(1-x)=\cancel{-x\cdot v(x)}-v(x)+\cancel{x\cdot v(x)}=-v(x).$$

Теорема 4.

Пусть $f(x,\alpha)$ непрерывна на ***G***, следовательно $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha$ (определенный интеграл не зависит от порядка интегрирования).

<u>Пример:</u>

Вычислить для $a>0,b>0$ интеграл $J(a,b)=\int\limits_0^1 \dfrac{x^b-x^a}{\ln x}dx$.

<u>I-й способ:</u>

Функция $f(x,y)=x^y$ непрерывна на $\left\{\begin{matrix}0<x<1\\ a<y<b\end{matrix}\right\}$.

$$J(a,b)=\int\limits_0^1 dx\int\limits_a^b x^y dy=\int\limits_a^b dy\int\limits_0^1 x^y dx=\int\limits_a^b \left.\frac{x^{y+1}}{y+1}\right|_0^1 dy=\int\limits_a^b \frac{1^a}{(y+1)}dy=\ln|y+1|\Big|_a^b=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

<u>II-й способ:</u>

$$J(a,b)=\int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx;$$

$$J'_b=\int\limits_0^1 \frac{1}{\cancel{\ln x}}\cdot x^b\cdot\cancel{\ln x}\,dx=\left.\frac{x^{b+1}}{b+1}\right|_0^1=\frac{1}{b+1};$$

$$J(a,b)=\int\frac{db}{b+1}=\ln(b+1)+C(a);$$

$$a=b \;\Rightarrow\; J(a,a)=0=\ln(a+1)+C(a) \;\Rightarrow\; C(a)=-\ln(a+1) \;\Rightarrow$$
$$J(a,b)=\ln(b+1)-\ln(a+1)=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

2. Несобственные параметрические интегралы.

1. Равномерная сходимость по параметру.

Рассмотрим несобственные интегралы, зависящие от параметра:

$$\mathrm{F}(t)=\int_a^{+\infty} f(x,t)\,dx \qquad (1)$$

$$\mathrm{F}(t)=\int_a^{b} f(x,t)\,dx \qquad (2)$$

(при некоторых значениях переменной есть точки разрыва II-го рода).

Например:

$\mathrm{F}(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx,\quad \mathrm{F}(\alpha)=\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ - при $\alpha>0$ - несобственный интеграл, при $x=0$ - точка разрыва II-го рода.

Определение 1.

Интеграл (1) называется **сходящимся** в точке $t=t_0\in D$, если существует

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,t_0)\,dx=\mathrm{F}(t_0)\neq\infty.$$

Определение 2.

Интегралы (1) и (2) называются **сходящимися** на множестве ***D***, если в любой точке этого множества интегралы сходятся (поточечная сходимость).

Определение 3.

Интеграл (1) называется **равномерно сходящимся** на множестве ***D***, если

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists M>0:\ \text{ для } \forall M_2>M_1>M \quad\Rightarrow\quad \left|\int_{M_1}^{M_2} f(x,t)\,dx\right|<\varepsilon \text{ для } \forall t\in D.$$

Определение 4.

Интеграл (2) называется **равномерно сходящимся** на множестве ***D***, если

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \text{ для } \forall a,c_2\quad b-\delta(\varepsilon)<c_1<c_2<b \quad\Rightarrow\quad \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x,t)\,dx\right|<\varepsilon \text{ для } \forall t\in D$$ (см. рис. 2.1.1).

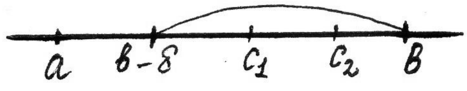


Рис. 2.1.1.

Теорема Вейерштрасса. Критерий равномерной сходимости.

Для интеграла (1):	Для интеграла (2):
Если $\forall t \in D$ и $a \le x < \infty$ $\lvert f(x,t)\rvert \le \varphi(x)$ и $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ - сходится, то, следовательно, интеграл (1) равномерно сходится на ***D***.	Если $\forall t \in D$ и $\forall x \in [a,b]$ $\lvert f(x,t)\rvert \le \varphi(x)$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ - сходится, то, следовательно, интеграл (2) равномерно сходится на ***D***.

Примеры:

1) Доказать, что $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\alpha} e^{-\alpha x}\sin x dx$ сходится равномерно на $\alpha \in [\delta, +\infty), \delta > 0$.

Решение:

$\left|e^{-\alpha x}\sin x\right| \le e^{-\delta x}$, а $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\delta x}dx = -\frac{1}{\delta}e^{-\delta x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\delta}$ - сходится. Следовательно, $J(\alpha)$ сходится равномерно.

2) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx;$

$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right| \le \varphi(x)$;

$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} < \infty \quad \Rightarrow$

интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$ сходится равномерно на $-\infty < \alpha < +\infty$.

2. Непрерывность по параметру.

Если интеграл сходится равномерно в интервале $\alpha < t < \beta$, то он представляет собой непрерывную функцию параметра ***y*** в этом интервале.

Пример:

Исследовать на непрерывность функцию $\mathrm{F}(\alpha)$ в указанном промежутке:

$\mathrm{F}(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{2+x^\alpha}$ при $\alpha > 2$.

Решение:

$$\frac{x}{2+x^\alpha} < \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-1}} = \frac{x^{-\alpha+2}}{2-\alpha}\Bigg|_1^{+\infty} = \begin{cases} \infty \text{ при } \alpha \le 2 \\ \dfrac{1}{(2-\alpha)x^{\alpha-2}}\Bigg|_\infty - \dfrac{1}{1\cdot(2-\alpha)} = \dfrac{1}{\alpha-2} \ne \infty \quad \text{при } \alpha > 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\mathrm{F}(\alpha)$ сходится равномерно $\Rightarrow$ $\mathrm{F}(\alpha)$ - непрерывна по α, $\alpha > 2$.

3. Интегрирование по параметру.

Теорема 6.

Если $f(x,t)$ непрерывна на $x \in [a, +\infty), t \in [c,d]$, и интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$, то, следовательно, $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)dx\right)dt = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,t)dt$ (т.е. можно менять порядок интегрирования).

Замечание:

Здесь один интеграл собственный, другой – несобственный.

Аналогично,

Теорема 7.

Если $f(x,t)$ непрерывна на $x\in[a,b], t\in[c,d]$, и интеграл $\int\limits_a^b f(x,t)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$, то, следовательно, $\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,t)dx\right)dt=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,t)dt$.

Примеры:

1) Вычислить интеграл: $\mathrm{F}(\alpha)=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-x}}{x}\cos 3x dx=?\quad(\alpha>0)$

Представим $\frac{e^{-\alpha x}-e^{-x}}{x}=\int\limits_\alpha^1 e^{-tx}dt=\{\text{действ.}\}=-\frac{1}{x}\int\limits_\alpha^1 e^{-tx}d(-tx)=-\frac{1}{x}e^{-tx}\Big|_\alpha^1=-\frac{1}{x}\cdot\left(e^{-x}-e^{-\alpha x}\right)$

$\Rightarrow\quad \mathrm{F}(\alpha)=\int\limits_0^\infty dx\int\limits_\alpha^1 e^{-tx}\cos 3x dt=\int\limits_\alpha^1 dt\int\limits_0^\infty e^{-tx}\cos 3x dx$ (изменить порядок интегрирования можно, т.к. $\int\limits_0^\infty e^{-tx}\cos 3x dx$ сходится равномерно, $|f(x,t)|<e^{-tx}$, интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-tx}dx$ сходится для $\alpha\le t\le 1$).

$\int\limits_0^\infty e^{-tx}\cos 3x dx=\{\text{интегрирование "по частям"}\}=\frac{e^{-tx}}{9+t^2}\left[-t\cos 3x+3\sin 3x\right]\Big|_0^\infty=\frac{t}{t^2+9};$

$\mathrm{F}(\alpha)=\int\limits_\alpha^1\frac{t}{t^2+9}dt=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^1\frac{d\left(t^2+9\right)}{t^2+9}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+9\right)\Big|_\alpha^1=\frac{1}{2}\left[\ln 10-\ln\left(\alpha^2+9\right)\right]=\underline{\frac{1}{2}\ln\frac{10}{\alpha^2+9}}$

Ответ: $\mathrm{F}(\alpha)=\frac{1}{2}\ln\frac{10}{\alpha^2+9}$.

2) Вычислить интеграл Эйлера – Пуассона: $I=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

Рассмотрим $\boxed{J=\int\limits_0^\infty xe^{-x^2y^2}dy}=\int\limits_0^\infty e^{-x^2y^2}dxy=\{xy=t\}=\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt^2$, т.е. числа $\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{J}$ – одинаковые.

Следовательно, $I^2=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x^2y^2}dy=\int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x^2\left(1+y^2\right)}dy\overset{!}{=}\int\limits_0^{+\infty}dy\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x^2\left(1+y^2\right)}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}dy\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2\left(1+y^2\right)}dx^2=$

$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}dy\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2\left(1+y^2\right)}}{\left(1+y^2\right)}d\left(-x^2\left(1+y^2\right)\right)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\cdot e^{-x^2\left(1+y^2\right)}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}dy=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\cdot(0-1)dy=$

$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}y\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4};\quad I^2=\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow\quad I=\frac{\sqrt{\pi}}{2};$

! Замечание:

Порядок интегрирования можно менять, т.к.

1. $xe^{-x^2\left(1+y^2\right)}$ непрерывна для любых $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$;
2. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$ - сходится;
3. $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2y^2}dy$ - сходится равномерно при всех $\boldsymbol{x}$;

4. Дифференцирование по параметру.

Теорема 8.

Пусть функция $f(x,t)$ и ее производная $f'(x,t)$ непрерывны на $x\in[a,\infty); t\in D=[c,d]$, а интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ сходится, интеграл $\int\limits_a^\infty f'(x,t)dx$ сходится равномерно на $\boldsymbol{D}$. Следовательно,

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int\limits_a^\infty f(x,t)dx=\int\limits_a^\infty f_t'(x,t)dx}$$

<u>Примеры:</u>

1) $J(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}dx;$

$$J'(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{-2\alpha}{x^2}\right)dx=-2\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}-x^2}\cdot\alpha\cdot\frac{dx}{x^2}=\left\{\begin{array}{c}\frac{\alpha}{x}=z\\ -\frac{\alpha}{x^2}dx=dz\end{array}\right\}=2\int\limits_\infty^0 e^{-\frac{\alpha^2}{z^2}-z^2}dz=-2J(\alpha);$$

$$\boxed{\frac{dJ}{d\alpha}=-2J}\quad\Rightarrow\quad\frac{dJ}{J}=-2d\alpha\quad\Leftrightarrow\quad\ln|J|=-2\alpha+C$$

$\underline{J(\alpha)=Ce^{-2\alpha}}$; $\qquad C=?$

Если $\alpha=0\quad\Rightarrow\quad J(0)=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=$ (интеграл Эйлера-Пуассона*) $=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$J(0)=C=\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

Ответ: $J(\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\alpha}$.

2) $J(a)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx,\quad a>0$

$$J'(a)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\cancel{\operatorname{tg}x}\cdot\left(1+a^2\operatorname{tg}^2x\right)}\cdot\cancel{\operatorname{tg}x}\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}dx=\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=t,\ x=\operatorname{arc\,tg}t\\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right\}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+a^2t^2\right)\left(1+t^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+a^2t^2\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{1}{2}\cdot2\pi i\left(\operatorname*{res}_{\frac{1}{a}i}f(z)+\operatorname*{res}_{i}f(z)\right)=\pi i\left(\frac{a}{2i\left(a^2-1\right)}-\frac{1}{2i\left(a^2-1\right)}\right)=\frac{\pi i}{a^2-1}\left(\frac{a}{2i}-\frac{1}{2i}\right)=$$

$$=\frac{\pi\cancel{i}\cancel{(a-1)}}{2\cancel{i}\cancel{(a-1)}(a+1)}=\frac{\pi}{2(a+1)};$$

$$\operatorname*{res}_{\frac{1}{a}i}f(z)=\lim_{z\to\frac{1}{a}i}\frac{1}{a^2\left(t+\frac{i}{a}\right)\left(t-\frac{i}{a}\right)}=\frac{1}{\cancel{a^2}\cdot\frac{\left(a^2-1\right)}{\cancel{a^2}}\cdot\frac{2i}{a}}=\frac{a}{2i\left(a^2-1\right)};$$

$$\operatorname*{res}_{i}f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{\left(1-a^2\right)\left(z+i\right)}=\frac{1}{\left(1-a^2\right)2i};$$

$$J(a)=\int\frac{\pi da}{2(a+1)}=\frac{\pi}{2}\ln(a+1)+C;$$

$$J(0)=0\quad\Rightarrow\quad C=0;$$

Ответ: $J(a)=\frac{\pi}{2}\ln(a+1)$.

3) $J(\alpha,\beta)=\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx.$

$$J'_\alpha(\alpha,\beta)=\frac{d}{d\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx=\int\limits_0^\infty\left(\frac{e^{-\alpha x^2}}{x}-\frac{e^{-\beta x^2}}{x}\right)'_\alpha dx=\int\limits_0^\infty\frac{1}{x}\cdot e^{-\alpha x^2}\cdot\left(-x^2\right)dx=-\int\limits_0^\infty xe^{-\alpha x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}d\left(-x^2\cdot\alpha\right)=\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\Big|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{1}{2\alpha}(0-1)=-\frac{1}{2\alpha};$$

---

* См. вывод интеграла Эйлера-Пуассона в примере 2 на стр. 5.

$J'_\beta\left(\alpha,\beta\right)=\int\limits_0^\infty xe^{-\beta x^2}\,dx=\dfrac{1}{2\beta}\quad\Rightarrow$

$J\left(\alpha,\beta\right)=-\int\dfrac{d\alpha}{2\alpha}+C\left(\beta\right)=-\dfrac{1}{2}\ln\alpha+C\left(\beta\right)$

Но $J'_\beta=C'\left(\beta\right)=\dfrac{1}{2\beta}\quad\Rightarrow\quad C\left(\beta\right)=\dfrac{1}{2}\ln\beta+C_0$.

$J\left(\alpha,\beta\right)=\dfrac{1}{2}\ln\beta-\dfrac{1}{2}\ln\alpha+C_0=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\beta}{\alpha}+C_0$

$C_0=?$

$J\left(\alpha,\alpha\right)=0\quad\left(\text{интеграл от }0\right)\quad\Rightarrow\quad C_0=0.$

Ответ: $J\left(\alpha,\beta\right)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\beta}{\alpha}=\ln\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}},\quad\boxed{\alpha\cdot\beta>0}$.

Интегралы Эйлера.

1. Гамма – функция.

Определение.

Гамма – функцией действительного аргумента ***x*** называется несобственный интеграл, зависящий от ***x***, как от параметра, вида: $\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ (1)

Некоторые свойства Гамма – функции:

1) Теорема 1.

Интеграл (1) **сходится** для любого $x>0$.

2) Теорема 2.

$\Gamma(1)=1$.

Доказательство:

$$\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} t^0e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=0+e^0=1.$$

Ч.т.д.

3) Теорема 3. Формула приведения.

$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

Доказательство:

$$\Gamma(x+1)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x+1-1}e^{-t}dt=\int\limits_0^{+\infty} t^x d\left(-e^{-t}\right)=\left\{\text{интегрируя "по частям", получим}\right\}=-t^xe^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt^x=$$

$$=\underbrace{-\lim_{t\to+\infty}\frac{t^x}{e^t}}_{=0}+\underbrace{\lim_{t\to0}\frac{t^x}{e^t}}_{=0}+\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}xt^{x-1}dt=x\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x).$$

Ч.т.д.

Замечание:

Первый из вычисленных пределов равен нулю в силу правила Лопиталя (неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$), а второй – непосредственной подстановкой $t=0$.

4) Теорема 4.

$\Gamma(n+1)=n!$

Доказательство:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\ldots=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\Gamma(3)=$$

$$=n(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot\Gamma(2)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1\cdot\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$$

Ч.т.д.

Замечание:

***n* –** натуральное.

5) Теорема 5. Формула дополнения.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\quad(0<x<1)$$

Задача 1.

С помощью формулы дополнения вычислить $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Решение:

Пусть $x=\frac{1}{2}$, тогда $1-x=\frac{1}{2}$;

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\pi/2}\quad\Rightarrow\quad\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\pi\quad\Rightarrow\quad\underline{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}}$$

Задача 2.

Выразить через гамма - функцию интеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^\alpha}dx\quad(\alpha>0)$.

Решение:

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^\alpha}dx=\left\{\begin{aligned}x^\alpha&=t\\ x&=t^{1/\alpha}\\ dx&=\frac{1}{\alpha}t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt\end{aligned}\right\}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}\frac{1}{\alpha}t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt=\frac{1}{\alpha}\underbrace{\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}\cdot t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt}_{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right),\ \text{т.к. } \frac{1}{\alpha}>0}=\underline{\frac{1}{\alpha}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

Задача 3.

Используя результаты задач 1 и 2, вычислить интеграл Эйлера – Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=2\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

Решение:

Положим $\alpha=2$ в результате задачи 2, тогда:

$$\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\text{, но по задаче 1 }\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\quad\Rightarrow\quad\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\quad\Rightarrow\quad\underline{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}}$$

Задача 4.

Выразить через гамма - функцию интеграл $\int\limits_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx$.

Решение:

$$\int\limits_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx=\left\{\begin{aligned}t&=x^2\\ dt&=2xdx\end{aligned}\right\}=\int\limits_0^{+\infty}t^ne^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}\cdot t^{n-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}\cdot t^{\left(n+\frac{1}{2}\right)-1}dt=\underline{\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

Замечание:

Используя результат задачи 4, можно также найти интеграл Эйлера-Пуассона:

при $n=0$ получим $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Можно показать, что для $\forall\, n\in N$

$\boxed{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}}$ - **формула «полуцелого» аргумента**.

2. Бета – функция.

Определение.

Бета – функцией двух действительных аргументов x и y называется интеграл вида:

$$\mathrm{B}(x,y)=\int\limits_0^1t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\tag{2}$$

<u>Некоторые свойства Бета – функции:</u>

1) Теорема 1.

Интеграл (2) сходится при любых $x>0, y>0$.

2) Теорема 2. Связь гамма- и бета- функций.

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

3) Теорема 3. Свойство симметрии.

$$\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x).$$

<u>Доказательство:</u>

$$\mathrm{B}(y,x)=\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,dt=\left\{\begin{matrix}\tilde t=1-t\\ t=1-\tilde t\\ dt=-d\tilde t\end{matrix}\right\}=\int_0^1\left(1-\tilde t\right)^{y-1}\cdot\tilde t^{x-1}\left(-d\tilde t\right)=\int_0^1\tilde t^{x-1}\cdot\left(1-\tilde t\right)^{y-1}d\tilde t=\mathrm{B}(x,y)$$

Доказательство проведено по определению. Еще проще – с помощью Теоремы 2:

$$\mathrm{B}(y,x)=\frac{\Gamma(y)\cdot\Gamma(x)}{\Gamma(y+x)}=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\mathrm{B}(x,y).$$

Ч.т.д.

4) Теорема 4. Формула дополнения.

$$\mathrm{B}(x,1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\quad(0<x<1)$$

<u>Доказательство:</u>

$\mathrm{B}(x,1-x)=\dfrac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+1-x)}=\dfrac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)}=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$ - по формуле дополнения для гамма – функции.

Ч.т.д.

<u>Задача 5.</u>

Выразить через эйлеровы интегралы: $\int_0^{\pi/2}\sin^\alpha x\cos^\beta x dx$.

<u>Решение:</u>

Пусть $t=\sin^2 x\ \Rightarrow\ 1-t=\cos^2 x$ и $dt=2\sin x\cos x dx$. Следовательно:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^\alpha x\cos^\beta x dx=\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{\beta}{2}}\frac{dt}{2t^{1/2}(1-t)^{1/2}}=\frac12\int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}dt=\frac12\int_0^1 t^{\frac{\alpha+1}{2}-1}(1-t)^{\frac{\beta+1}{2}-1}dt=$$

$$=\frac12\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2};\frac{\beta+1}{2}\right)=\frac12\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}$$

<u>Задача 6.</u>

Вычислить: $J=\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}$.

<u>Решение:</u>

Пусть $t=\dfrac{x}{2}\ \Rightarrow\ x=2t\ \Rightarrow\ dx=2dt$.

$x^2=4t^2;\quad 2-x=2-2t=2(1-t)$

Следовательно:

$$J=\int_0^1 \frac{2dt}{\sqrt[3]{4t^2\cdot 2(1-t)}}=\int_0^1 t^{-2/3}(1-t)^{-1/3}\,dt=\int_0^1 t^{\frac{1}{3}-1}(1-t)^{\frac{2}{3}-1}\,dt=\mathrm{B}\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)=\mathrm{B}\left(\frac{1}{3};1-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\{\text{по формуле дополнения}\}=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\underline{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

<u>Задача 7.</u>

Выразить через эйлеровы интегралы при $0<m<n$: $J=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}dx$.

<u>Решение:</u>

$$\frac{1}{1+x}=1-t \quad\Rightarrow\quad x+1=\frac{1}{1-t} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{1-t}-1=\frac{1-1+t}{1-t}=\frac{t}{1-t};$$

$$dx=\frac{dt}{(1-t)^2};\quad \begin{array}{l} x=0 \quad\Rightarrow\quad t=0 \\ x=+\infty \quad\Rightarrow\quad t=1 \end{array}$$

$$J=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{m-1}\cdot(1-t)^n\frac{dt}{(1-t)^2}=\int_0^1 t^{m-1}\cdot(1-t)^{n-m-2+1}\,dt=\int_0^1 t^{m-1}\cdot(1-t)^{(n-m)-1}\,dt=$$

$$=\mathrm{B}(m,n-m)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)}\quad (n-m>0,\ \text{т.к. } n>m)$$