Типовой расчёт, №1, Вар №7 Красников А.

ВВ-2-06

$$z = 1 - th\left(\frac{\ln 3}{4} + i\frac{5\pi}{12}\right)$$

1) $z_1 = \frac{\ln 3}{4} + i\frac{5\pi}{12}$,

$$th z_1 = \frac{sh z_1}{ch z_1} = \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{e^{z_1} + e^{-z_1}} = \frac{e^{2z_1} - 1}{e^{2z_1} + 1}$$

$$2z_1 = \frac{\ln 3}{2} + i\frac{5\pi}{6}; \quad e^{2z_1} = e^{\ln\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$th z_1 = \frac{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \frac{-5 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{(5 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} = \frac{8 + i4\sqrt{3}}{4} = 2 + i\sqrt{3}$$

$$z = 1 - (2 + i\sqrt{3}) = -1 - i\sqrt{3}; \qquad z = -1 - i\sqrt{3}$$

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2; \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2}; \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$z = 2 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2 \cdot \left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -1 - i\sqrt{3}$$

2) $n = (-1)^7(7+10) = -17$

$$z^{-17} = 2^{-17} \cdot e^{-i\left(\frac{2\pi}{3}\right)(-17)} = 2^{-17} \cdot e^{i\frac{34\pi}{3}}$$

$$-\pi < \frac{34\pi}{3} + 2\pi k \le \pi; \quad -\frac{37}{3} \le 2k \le -\frac{31}{3}; \quad -6{,}167 < k \le -5{,}167 \Rightarrow k = -6$$

$$z^{-17} = 2^{-17} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2^{-17}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -2^{-18} - i\sqrt{3} \cdot 2^{-18}$$

+

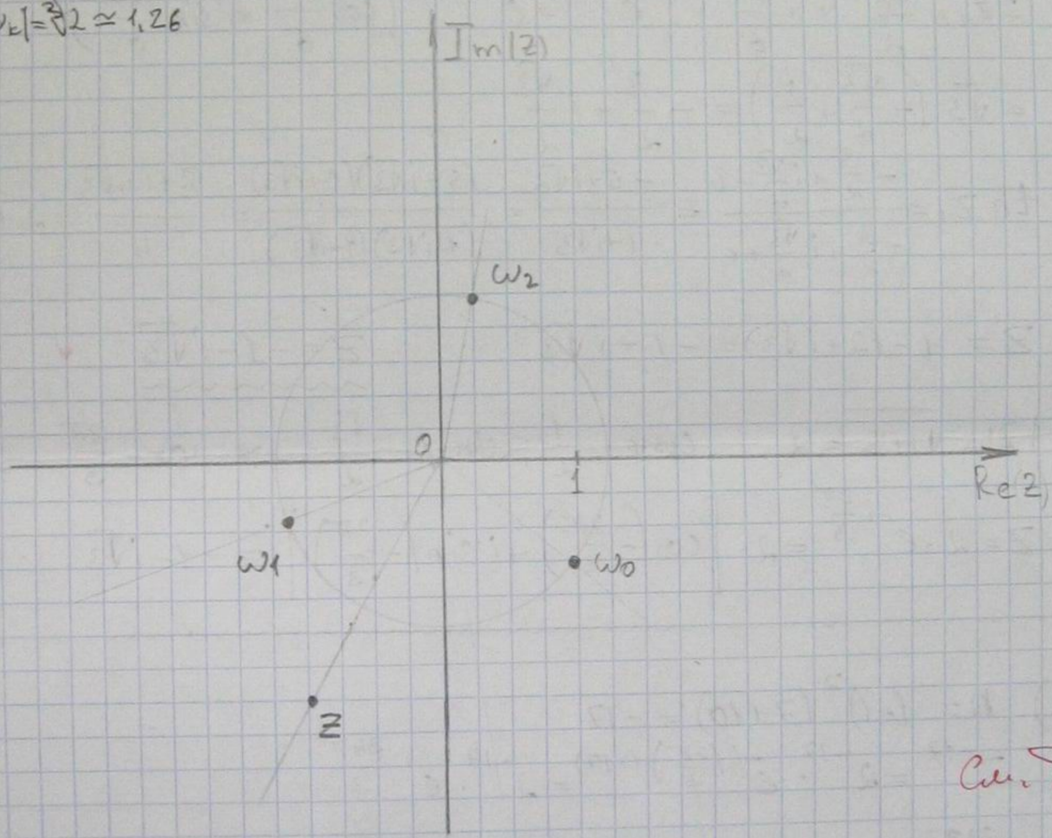
3) $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{-i\frac{\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)}{3}}$, $k=0;1;2$

$k=0: \quad w_0 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{9}} = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right]$

$k=1: \quad w_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{-i\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(-\frac{8\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right)\right]$

$k=2: \quad w_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{-i\frac{14\pi}{9}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{4\pi}{9}} = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right]$

4) $|w_k| = \sqrt[3]{2} \simeq 1{,}26$



Типовой расчёт №2 Красняков А.М.

Вариант №7 ВВ-2-06

Решить уравнение.
Изобразить решения на комплексной плоскости

$z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$

Замена: $t = z^3$

$t^2 - 2 \cdot i \cdot t - 1 = 0$

$D = 4i^2 + 4 = 0$; $t = \frac{2i \pm 0}{2} = i$

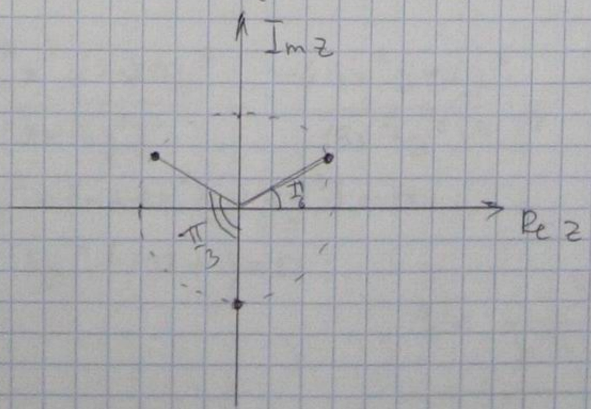
$z^3 = i$; $z = \sqrt[3]{i}$

$z = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$

$k = 0$: $z = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$k = 1$: $z = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$k = 2$: $z = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$



+

Типовой расчёт, №3 Вар №7 Красняков, ВВ-2-06

При каких значениях константы a функция $v(x,y)$ является мнимой частью некоторой регулярной функции $f(z)$? Восстановить $f(z)$

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{y}{ax^2+y^2} = v(x,y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2axy}{(ax^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{-2ay(ax^2+y^2)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(ax^2+y^2)}\cdot 2ax\cdot(-2axy)}{(ax^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{-2ay\cdot(ax^2+y^2)+4ax\cdot 2axy}{(ax^2+y^2)^3} = \frac{6a^2x^2y - 2ay^3}{(ax^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(ax^2+y^2) - y\cdot 2y}{(ax^2+y^2)^2} = \frac{ax^2-y^2}{(ax^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-2y(ax^2+y^2)^{\cancel{2}\,1} - 2(ax^2+y^2)\cdot 2y\,(ax^2-y^2)}{(ax^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{-2y(ax^2+y^2) - 4y(ax^2-y^2)}{(ax^2+y^2)^3} = \frac{-2ax^2y - 2y^3 - 4ax^2y + 4y^3}{(ax^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{-6ax^2y+2y^3}{(ax^2+y^2)^3}$$

$$\Delta v = 0, \quad \frac{6a^2x^2y - 2ay^3}{(ax^2+y^2)^3} = \frac{-6ax^2y+2y^3}{(ax^2+y^2)^3},$$

$$6a^2x^2y - 2ay^3 + (-6ax^2y + 2y^3) = 0$$

$$6x^2y(a-1)\cdot a + 2y^3(-a+1) = 0$$

$a = 1$, $\quad v = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u = \int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{-x}{x^2+y^2} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2y(-x)}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y) = \cancel{\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}} + \varphi'(y) =$$

$$= -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \cancel{\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}}, \quad \Rightarrow \varphi'(y) = 0$$

$$\varphi(y) = const$$

$$u = \frac{-x}{x^2+y^2} + C$$

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$f(z) = \left(\frac{-x}{x^2+y^2} + C\right) + i\cdot\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2} + i\,\frac{y}{x^2+y^2} + C$$

$$f(z) = \frac{-(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{-\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = -\frac{1}{z}$$

Ответ. $f(z) = -\dfrac{1}{z}$

Типовой расчёт №4. Красняков ВВ-2-06

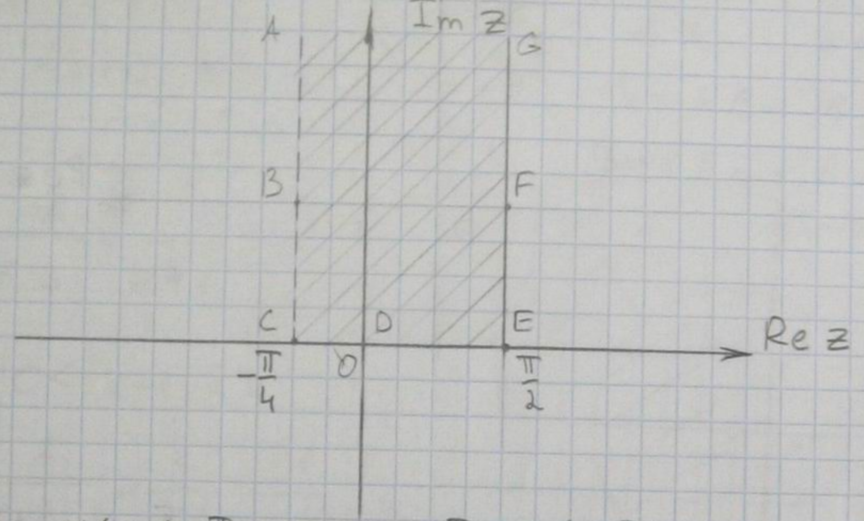
Дана ф-ция $f(z)$ и дано множество E

1) Найти образ $E' = f(E)$ множество E при отображении $w = f(z)$ (описав множество E') с помощью неравенств

2) Изобразить множества E и E' на комплексной плоскости.

$f(z) = e^{2zi + i\frac{\pi}{4}} + 3i$; E: $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}$; $0 < \operatorname{Im} z$

E:



$$e^{2iz + i\frac{\pi}{4}} = e^{2i(x+iy) + i\frac{\pi}{4}} = e^{2ix - 2y + i\frac{\pi}{4}} = e^{i(2x + \frac{\pi}{4}) - 2y}$$

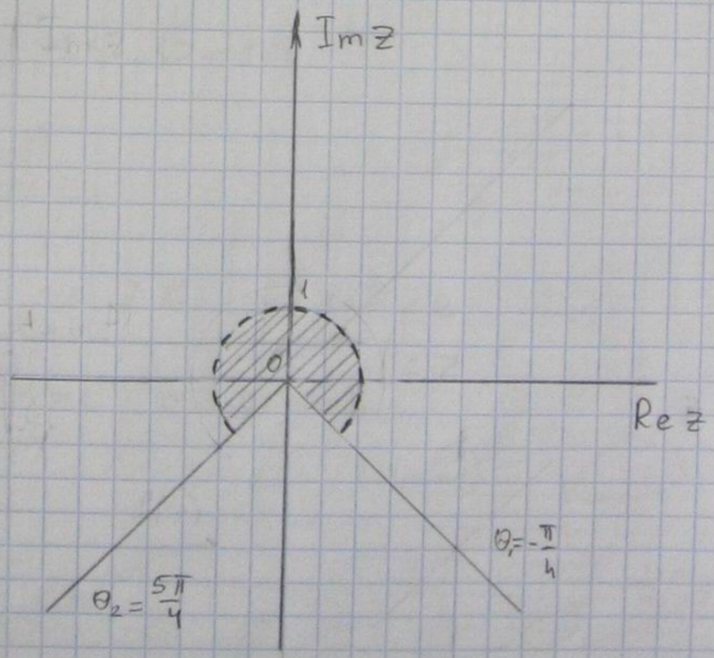
$\theta = 2x + \frac{\pi}{4}$;

$\theta_1 = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

$\theta_2 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

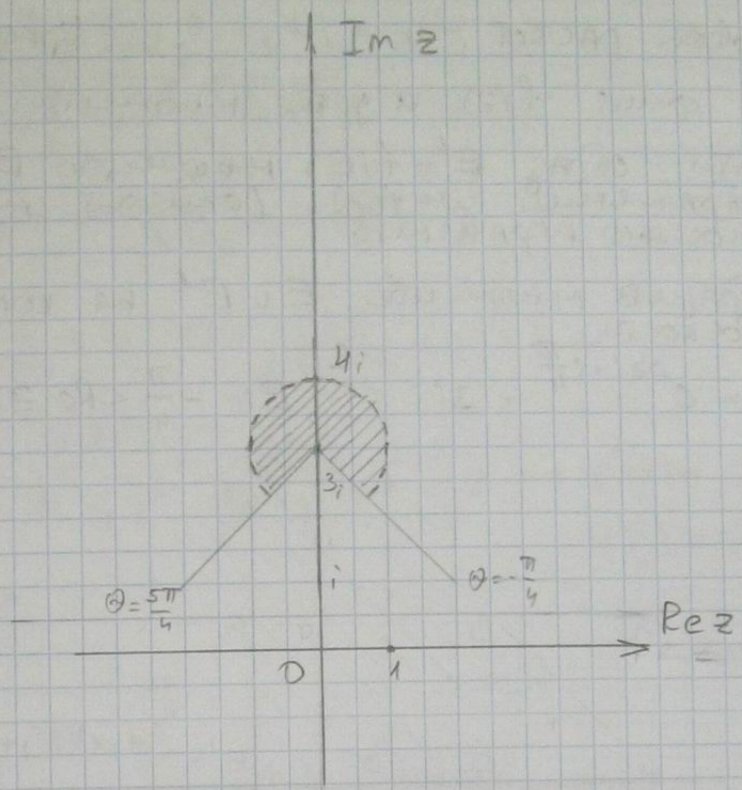
$\rho = e^{-2y}$

$0 \leq \rho < 1$



+

f(z)



Типовой расчёт №5   Вариант №7   Красняков А.

ВВ-2-06

Найти все возможные разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана (Тейлора) по степеням $z-z_0$.

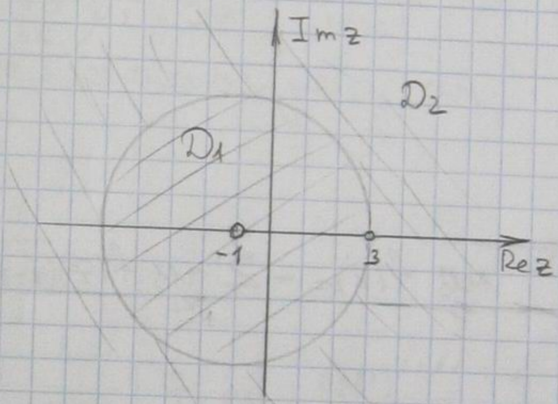
$$f(z)=\frac{3z-1}{z^2-2z-3}\ ; \quad z_0=-1$$

$$\frac{3z-1}{z^2-2z-3}=\frac{3z-1}{(z-3)(z+1)}=\frac{A}{z-3}+\frac{B}{z+1}=\frac{2}{z-3}+\frac{1}{z+1}$$

$3z-1=A(z+1)+B(z-3)$; $\quad z=-1:\ -4=-4B \Rightarrow B=1$

$z=3:\ 8=4A \Rightarrow A=2$

$$f(z)=\frac{2}{z-3}+\frac{1}{z+1}$$



1) D_1: $\quad 0<|z+1|<4$

$$\frac{2}{z-3}=\frac{2}{(z+1)-4}=\frac{2}{-4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{4}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^n}\ ; \quad \left|\frac{z-1}{4}\right|<1,\quad |z-1|<4$$

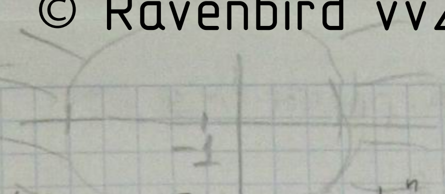
$$f(z)=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^n}$$

$z_0=-1$ – изолированная, т.к. $\exists R:\ 0<|z+1|<R$ $f(z)$ разлагается в ряд Лорана, $R=4$

z_0 – полюс, т.к. один член с отр. степенью.

Вычет в т. z_0, $C_{-1}=1$ $\quad (n=-1)$

$$\operatorname{res}_{-1} f(z)=1$$



2) D_2: $|z+1|>4$

$$\frac{2}{z-3}=\frac{2}{(z+1)-4}=\frac{2}{(z+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{z+1}}=\frac{2}{z+1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+1)^n}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+1)^{n+1}}$$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+1)^{n+1}}$$

~~т. $z_0=-1$ — существенно особая точка, т.к. бесконечно много членов с отр. степенями.~~

~~$C_{-1}=1+2=3$ $(n=0)$~~

См.

Тип ос. точки определяют по разложению в её окрестности (см. п. 1).

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z)=-\sum \operatorname*{res}_{z_k} f(z)=-\operatorname*{res}_{-1} f(z)=-1$$

Типовой расчёт №6 Вариант 7 Красняков А.

ВВ-2-06

Разложить ф-цию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-z_0$

$$f(z)=\sin\frac{3z-i}{3z+i} \qquad z_0=-\frac{i}{3}$$

$$t=z+\frac{i}{3}, \quad z=t-\frac{i}{3}$$

$$f(z)=\sin\frac{3t-i-i}{3t-i+i}=\sin\frac{3t-2i}{3t}=\sin\left(1-\frac{2i}{3t}\right)=$$

$$=\sin 1\cdot\cos\left(\frac{2i}{3t}\right)-\cos 1\cdot\sin\left(\frac{2i}{3t}\right)$$

$$\cos\frac{2i}{3t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2i}{3t}\right)^{2n}\cdot\frac{1}{(2n)!}$$

$$\sin\frac{2i}{3t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2i}{3t}\right)^{2n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}$$

$$f(z)=\sin 1\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2i)^{2n}}{(2n)!\cdot(3t)^{2n}}\right]-\cos 1\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2i)^{2n+1}}{(2n+1)!\,(3t)^{2n+1}}\right]$$

$$f(z)=\sin 1\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2i)^{2n}}{(2n)!\cdot 3^{2n}\cdot\left(z+\frac{i}{3}\right)^{2n}}\right]-$$

$$-\cos 1\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2i)^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot 3^{2n+1}\cdot\left(z+\frac{i}{3}\right)^{2n+1}}\right]$$

+

$C_{-1}: \quad n=0$

$$\operatorname*{res}_{-\frac{i}{3}} f(z)=C_{-1}=-\cos 1\cdot(-1)^0\cdot\frac{(2i)^1}{1!\cdot 3^1}=-\cos 1\cdot\frac{2i}{3}$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z)=-\operatorname*{res}_{-\frac{i}{3}} f(z)=\cos 1\cdot\frac{2i}{3}$$

+

Красняков А
ВВ-2-06

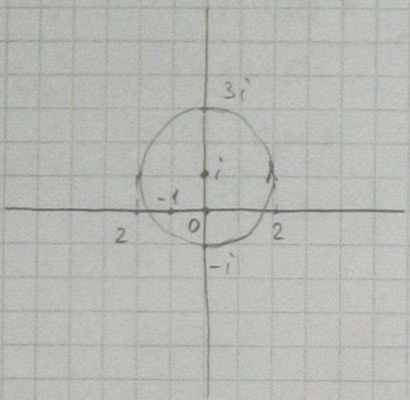
Типовой расчёт №7

Вариант №7

Найти интеграл с помощью вычетов.

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^3 - z^2 - 2z}\, dz \quad , \quad \Gamma: \ |z - i| = 2$$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\cos z}{z(z+1)(z-2)}$$



$z = 0$ — простой полюс

$z = -1$ — простой полюс

$$I = 2\pi i \cdot \left(\underset{-1}{\mathrm{res}}\, f(z) + \underset{0}{\mathrm{res}}\, f(z) \right)$$

$$\underset{-1}{\mathrm{res}}\, f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{\cos z}{z(z-2)} = \frac{\cos(-1)}{+3}$$

$$\underset{0}{\mathrm{res}}\, f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{-2}$$

$$I = 2\pi i \cdot \left(\frac{\cos 1}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

+

Типовой расчёт №8

Красняков А.М.
ВВ-2-06

Вариант №7

Найти несобственный интеграл с помощью вычетов

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)\cdot\cos x}{x^2-4x+5}\,dx$$

$$f(x)=\frac{(x-1)\cdot\cos x}{[x-(2+i)][x-(2-i)]}\;;\qquad f(z)=\frac{(z-1)\cdot e^{iz}}{[z-(2+i)][z-(2-i)]}$$

Особые точки: $z=2+i$
$z=2-i$

$\operatorname{Im} z>0 \Rightarrow$ особая точка $z=2+i$, простой полюс.

$$I=\operatorname{Re}\left[2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=2+i} f(z)\right]$$

$$\operatorname*{res}_{z=2+i} f(z)=\lim_{z\to 2+i}\frac{e^{iz}\cdot(z-1)}{z-(2-i)}=\frac{e^{i(2+i)}\,(2+i-1)}{2+i-2+i}=\frac{(1+i)\cdot e^{2i-1}}{2i}$$

$$I=\operatorname{Re}\left[\cancel{2}\pi\cancel{i}\cdot\frac{e^{2i-1}(1+i)}{\cancel{2i}}\right]=\operatorname{Re}\left[\pi\cdot e^{-1}\cdot(1+i)(\cos 2+i\sin 2)\right]=$$

$$=\operatorname{Re}\left[\pi\cdot e^{-1}\left(\cos 2-\sin 2+i(\cos 2+\sin 2)\right)\right]=\pi\cdot e^{-1}\cdot(\cos 2-\sin 2)$$

Ответ: $I=\pi\cdot e^{-1}\cdot(\cos 2-\sin 2)$

+

Типовой расчёт №4

Красняков А. М.
ВВ-2-06

Вариант №7

Используя теорему Руше, найти число нулей функции $F(z)$ в области D.

$$F(z) = 2z^5 - 8\cdot z^4 + z^3 + 2z^2 + z - 1$$

$$D: \quad 1 < |z| < 2$$

1) В круге $|z| < 1$:

$$F(z) = \underbrace{-8z^4}_{f(z)} + \underbrace{2z^5 + z^3 + 2z^2 + z - 1}_{\varphi(z)}$$

$$\left.\begin{aligned} |f(z)| &= 8\cdot 1 = 8 \\ |\varphi(z)| &= 2\cdot 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 7 \end{aligned}\right\} \quad |\varphi(z)| < |f(z)|$$

Значит, в круге $|z| < 1$ $F(z)$ имеет 4 нуля.

2) В круге $|z| < 2$:

$$F(z) = \underbrace{-8z^4}_{f(z)} + \underbrace{2z^5 + z^3 + 2z^2 + z - 1}_{\varphi(z)}$$

$$\left.\begin{aligned} |f(z)| &= 8\cdot 2^4 = 128 \\ |\varphi(z)| &\le 2\cdot 2^5 + 2^3 + 2\cdot 2^2 + 2 + 1 = 83 \end{aligned}\right\} \quad |\varphi(z)| < |f(z)|$$

Значит, в круге $|z| < 2$ $F(z)$ имеет 4 нуля.

Таким образом, в кольце $1 < |z| < 2$ функция $F(z)$ не имеет нулей.

+

Типовой расчёт №10 Красняков А.М.
Вариант 7 ВВ-2-06

С помощью вычетов найти синус-преобразование Фурье $F_s(\omega)$ функции $f(x)$. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье.

+

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} \sin\omega t \, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} \cdot \sin\omega t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \mathrm{Im}\Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cdot e^{i\omega t}}{(1+t^2)^2} dt}_{I(\omega)}\Bigg]$$

$$f(z) = \frac{z \cdot e^{i\omega z}}{(1+z^2)^2} = \frac{z \cdot e^{i\omega z}}{[(z+i)(z-i)]^2}$$

Особые точки:

$z = i$, $\mathrm{Im}\, z > 0$

$z = -i$

$$I(\omega) = 2\cdot\pi\cdot i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\mathrm{res}}\, f(z) =$$

$$\underset{z=i}{\mathrm{res}}\, f(z) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{i\omega z}\cdot z}{(z+i)^2}\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{(z\cdot e^{i\omega z})'\cdot(z+i)^2 - ((z+i)^2)'\cdot z\cdot e^{i\omega z}}{(z+i)^4}\right) =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{(e^{i\omega z} + i\omega z\cdot e^{i\omega z})(z+i)^2 - 2(z+i)\cdot z\cdot e^{i\omega z}}{(z+i)^4} =$$

$$= \frac{(e^{-\omega} - \omega\cdot e^{-\omega})\cdot(-4) - 2\cdot 2i\cdot i\cdot e^{-\omega}}{(2i)^4} = \frac{-4\cdot e^{-\omega} + 4\cdot\omega\cdot e^{-\omega} + 4\cdot e^{-\omega}}{16} = \frac{\omega\cdot e^{-\omega}}{4}$$

$$I(\omega) = 2\pi i \frac{\omega\cdot e^{-\omega}}{4} = i\cdot\frac{\pi\cdot\omega\cdot e^{-\omega}}{2}$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot \mathrm{Im}\left[i\cdot\frac{\pi\cdot\omega\cdot e^{-\omega}}{2}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\pi\cdot\omega\cdot e^{-\omega}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\cdot\omega\cdot e^{-\omega}$$

$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\cdot\omega\cdot e^{-\omega}$ – синус преобразование Фурье.

Интеграл Фурье:

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega t\,d\omega$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{8}}\cdot\omega\cdot e^{-\omega}\sin\omega t\,d\omega=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\omega\cdot e^{-\omega}\sin\omega t\,d\omega$$