Задача №1 (а, б) Исследовать на сходимость числовые ряды:

б) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2} = // a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} // =$

$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n\cdot 3^1\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot 3^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n =$

$= 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+3} - \frac{1}{n+3}\right)^n = 3\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{n\cdot\frac{-(n+3)}{-(n+3)}} =$

$= 3\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{-n+3}\right)^{-\frac{n}{n+3}} = 3e^{-1} = \frac{3}{e} > 1$ – расходится

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n\sqrt[3]{n^2+3}}$

Сравниваем с рядом $a_n = \frac{1}{n^{5/3}}$ – этот ряд сход.

$\frac{1}{n^{5/3}} > \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n\sqrt[3]{n^2+3}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}\; n^{5/3}}{n^{5/3}\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{1} =$

$= \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд сход. или расход. одновремен.,

а т.к. $a_n = \frac{1}{n^{5/3}}$ – сход, то и

исследуемый ряд – сходится, при

том ряд абсолютно сходится.

$-3 < x < 3$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

$R = 1$

$-1 < x \leq 1$

Т.е. области сход. для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} x^n (-1)^n \left(\frac{1}{3^n} + 1\right)$ равна $(-1; 1)$.

Задача 9

Приближённо вычислить определённый интеграл с точностью до 0,0001:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{4 + x^3}$$

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{4\left(1 + \frac{x^3}{4}\right)} = \frac{1}{4} \int_0^{0,5} \left[1 - \frac{x^3}{4} + \frac{x^6}{16} \dots\right] dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^4}{16} + \frac{x^7}{112}\right)\Big|_0^{0,5} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4 \cdot 256} + \frac{1}{4 \cdot 112 \cdot 128} + \dots$$

верно!

$= \frac{1}{4}\left(\frac{127}{2586} + \frac{1}{14336}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{7113}{14336}\right) =$

$= \frac{7113}{57344} = 0,1240$ – стонскью

до 0,0001.

Задание 4. а)

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$. Указать обл. сходимости. Найти $f^{(k)}(x_0)$, если $k = 100 + N$ варианта.

$f(x) = xe^{x+2} \qquad x_0 = 1$

$xe^{x+2} \Rightarrow ((x-1)+1)e^{(x-1)+3} =$

$= ((x-1)+1)e^{x-1}e^3 = ((x-1)e^{(x-1)} + e^{(x-1)})e^3$

$= e^3((x-1)(1 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \ldots) +$

$+ (1 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \ldots)) =$

$= e^3(((x-1) + \frac{(x-1)^2}{1!} + \frac{(x-1)^3}{2!} + \ldots) +$

$+ (1 + \frac{x-1}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \ldots)) =$

$$= e^3\left(1+(x-1)\left(1+\frac{1}{1!}\right)+(x-1)^2\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\right.$$
$$\left.+(x-1)^3\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)(x-1)^n\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^3\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)(x-1)^n$$

$$f^{108}(1) = e^3\left(\frac{1}{(107)!}+\frac{1}{(108)!}\right)(108)!$$

$$f^{108}(1) = e^3\left(\frac{108!}{107!}+1\right)$$

Ищем область сходимости:

$$R = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n!+(n+1)!)((n+1)!n!)}{n!\cdot(n-1)!\,((n+1)!+n!)} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,(n+1)\,(n+1)!\,n!}{n!\,(n-1)!\,n!\,(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = n \text{ т.е. ряд сходится}$$

на всей числовой оси.

Задание 6

а) Разложить функцию $y = 2-4x$, заданную на полупериоде $(0,1)$ в ряд фурье по косинусам:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = 2\int_0^1 (2-4x)\,dx = 2\left(2x - \frac{4x}{2}\right.$$

$$= 0$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = 2\int_0^1 (2-4x)\cos(\pi n$$

$$= \begin{bmatrix} u = 2-4x & du = -4dx \\ dv = \cos\pi n x\,dx & v = \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \end{bmatrix} =$$

$$= 2\left(\left.(2-4x)\frac{\sin \pi n x}{\pi n}\right|_0^1 + 4\int_0^1 \frac{\sin \pi n x}{\pi n}\,d\right.$$

$$= 2\left(\frac{4}{\pi n}\int_0^1 \sin(\pi n x)\,dx\right) = \frac{8}{(\pi n)^2}\left(1-(-1)\right.$$

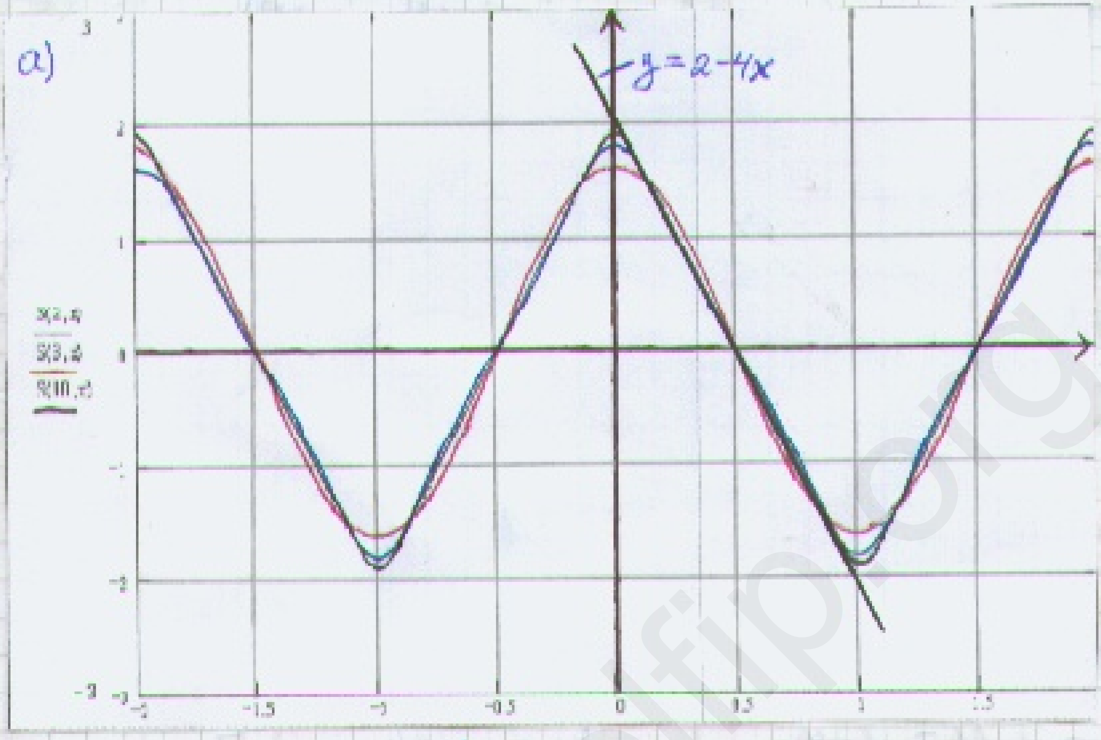
$$S(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{1-(-1)^n)\cos\pi n x}{n^2}\right), \; m=$$

Строим графики (см. рис а))

Запишем равенство Парсеваля для полученного ряда:

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(s(x)\right)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

a)



$$\int_{-1}^{0}(4+2x)^2dx+\int_{0}^{1}(4-2x)^2dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}(4+16x+16x^2)dx+\int_{0}^{1}(4-16x+16x^2)dx=$$

$$=\left(4x+8x^2+\frac{16x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(4x-8x^2+\frac{16}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{1}=$$

$$=-4+\frac{16}{3}-4+\frac{16}{3}=-8+\frac{32}{3}=\frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64}{(\pi n)^4}\left(1-(-1)^n\right)^2$$

$$\frac{\pi^4}{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)^2}{n^4},$$ если n - нечётн.

$$\frac{\pi^4}{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^2}{(2n-1)^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

Сумму ряда $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(1-(-1)^n)}{n^4}\right)$ можно отыскать с помощью полученной функции.

б) Разложить функцию $y=2-4x$, заданную на полупериоде $(0,1)$ в ряд Фурье по синусам.

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx=$$

$$=2\int_0^1(2-4x)\sin(\pi n x)\,dx=$$

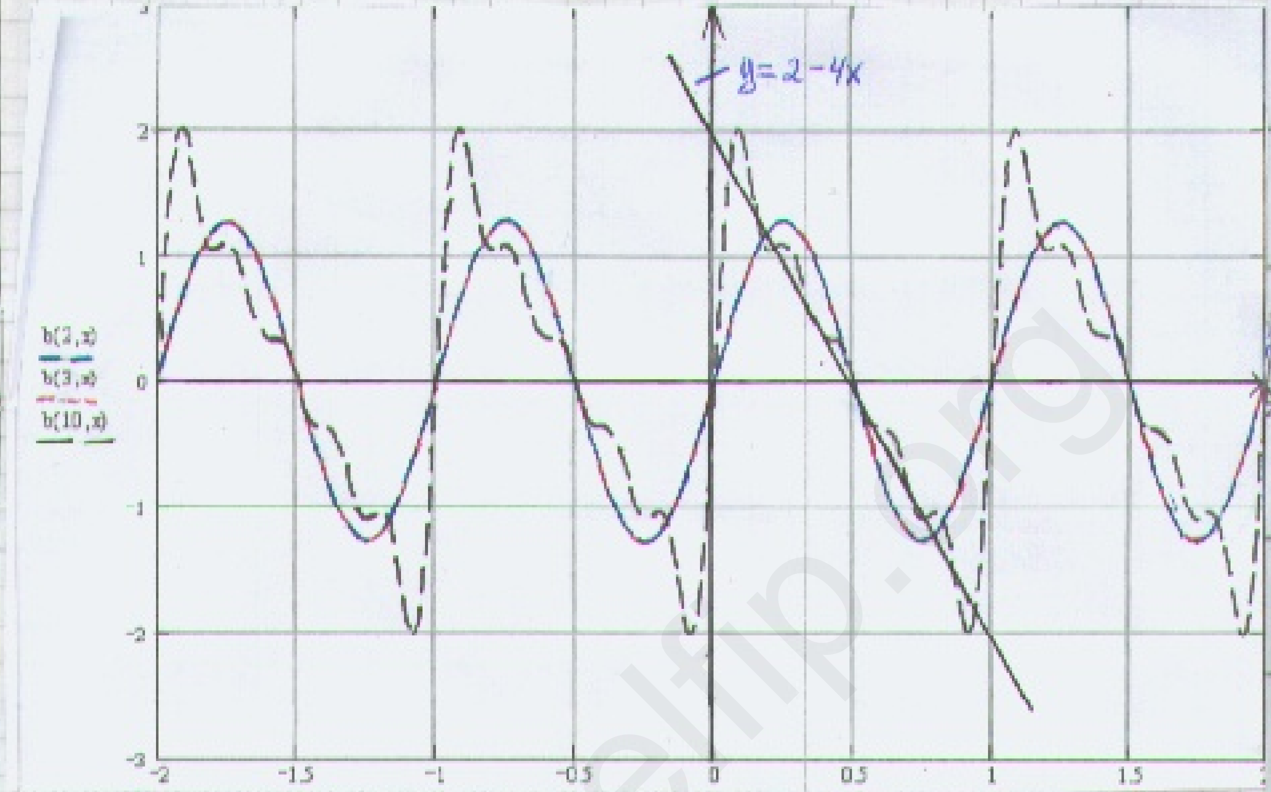
$$=\left[\begin{array}{ll} u=2-4x & du=-4dx \\ dv=\sin(\pi n x)dx & v=-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\end{array}\right]=$$

$$=2\left(-\left((2-4x)\frac{\cos n\pi x}{\pi n}\right)\Big|_0^1\right)-\frac{4}{\pi n}\int_0^1\cos\pi n x$$

$$=2\left(2\frac{\cos n\pi}{n\pi}+\frac{2}{n\pi}\right)=\frac{4}{\pi n}((-1)^n+1)$$

$$S(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{m}((-1)^n+1)\frac{\sin(n\pi x)}{n},\ m=2,3$$

Строим графики 2, 3, 10-ой десятичн... сум:



Из графика видно, что данный ~~функц~~ ряд сходится неравномерно (т.к. функция нечётная)

в) Разложить функцию $y=2-4x$ в ряд Фу[рье]
заданную на полупериоде $(0,1)$ и
продолжая ее на полупериод $(-1,0)$
функцией равной 0

$$a_0 = \int_0^1 (2-4x)dx = 0$$

$$a_n = \int_0^1 ((2-4x)\cos(\pi n x))dx = \frac{4}{(\pi n)^2}(1-(-1)^n)$$

$$b_n = \int_0^1 ((2-4x)\sin(\pi n x))dx = \frac{2}{n\pi}((-1)^n+1)$$

$$S(x) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{(1-(-1)^n)\cos\pi n x}{n^2}\right) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{((-1)^n+1)\sin n\pi x}{n}\right), \ m = 2, 4, 10$$

Построить графики второй, ~~третьей~~, четвертой и десятой
десятичных сумм. (см. рис в))

Из графика видно, что данный
ряд не сходится т. к. функция имеет
разрыв.

B)

+

Задание 7 Методом Фурье найти решение уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ длины $l = 2$, закреплённой на концах: $u(0,t) = u(2,t) = 0$ и удовл. след. начальным условиям: $u(x;0) = f(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi$

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ \varphi(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\frac{\pi n a}{l} b_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx$$

$$b_k = \frac{2}{\pi n} \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\right) \sin\frac{\pi n x}{2} \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left[\begin{array}{ll} u = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} & du = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) dx \\ dv = \sin\frac{\pi n x}{2} dx & v = -\frac{2}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \end{array} \right.$$

$$= \frac{2}{\pi n} \Bigg(\underbrace{\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\right)\left(-\frac{2}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\right)\Bigg|_0^2}_{0} +$$

$$+ \int_0^2 \left(\frac{2}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) dx \Bigg) =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left[\begin{array}{ll} u = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} & du = \frac{1}{2} dx \\ dv = \cos\frac{\pi n x}{2} & v = \sin\frac{\pi n x}{2} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{4}{(\pi n)^2} \Bigg(\underbrace{\left(\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi n x}{2}\right)\right)\Bigg|_0^2}_{0} - \frac{1}{2} \int_0^2 \sin\frac{\pi n x}{2}$$

$$= \frac{4}{(\pi n)^2}\left(-\frac{1}{2}\int_0^2 \sin\frac{\pi n x}{2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{4}{(\pi n)^3}\left(-\left(\left(-\cos\frac{\pi n x}{2}\right)\Big|_0^2\right)\right) =$$

$$= \frac{4}{(\pi n)^3}\left(-\left(\left(-\cos \pi n\right)+1\right)\right) =$$

$$= \frac{4}{(\pi n)^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(a_n \cos\frac{\pi n a}{2}t + b_k \sin\frac{\pi n a}{2}t\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(\pi n)^3}\left((-1)^n-1\right)\sin\frac{\pi n}{2}t\,\sin\frac{\pi n x}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n-1\right)}{n^3}\sin\frac{\pi n}{2}t\,\sin\frac{\pi n x}{2}$$

Задание 8 Найти приближённое решение задачи Коши. Решен. ищется в виде степ. ряда $\sum_{n=0} = C_k x^k$. Погрешность не должна превосходить 0,001 при $x \in [0, x_0]$

$$y'' + x^3 y' + 3x^2 y = 1 \qquad x_0 = 0{,}5$$

$y(0)=0 \quad y'(0)=0 \quad y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$\varepsilon = 0{,}001 \quad x \in [0; 0{,}5]$

$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8 + c_9 x^9 + c_{10} x^{10} + c_{11} x^{11} + c_{12} x^{12} + c_3 x^{13} + c_{14} x^{14} + c_{15} x^{15} + c_{16} x^{16}$

$y' = 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + 6c_6 \ldots + 7c_7 x^6 + 8c_8 x^7 + 9c_9 x^8 + 10c_{10} x^9 + 11c_{11} x^{10} + 12c_{12} x^{11} + 13c_{13} x^{12} + 14c_{14} x^{13} + 15c_{15} x^{14} + 16c_{16} x^{15}$

$y' = 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + 6c_6 x^5 + 7_7 x^6 + 8c_8 x^7 + 9c_9 x^8 + 10c_{10} x^9 + 11c_{11} x^{10} + 12c_{12} x^{11} + 13c_{13} \ldots + 14c_{14} x^{13} + 15c_{15} x^{14} + 16c_{16} x^{15} \ldots$

$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + 30c_6 x^4 + 42c_7 x^5 + 56c_8 x^6 + 72c_9 x^7 + 90c_{10} x^8 + 110c_{11} x^9 + 132c_{12} x^{10} + 156c_{13} x^{11} + 182c_{14} \ldots + 210c_{15} x^{13} + 240c_{16} x^{14} \ldots$

$$\underline{x^3y'} = 2c_2x^4 + 3c_3x^5 + 4c_4x^6 + 5c_5x^7 +$$
$$+ 6c_6x^8 + 7c_7x^9 + 8c_8x^{10} + 9c_9x^{11} +$$
$$+ 10c_{10}x^{12} + 11c_{11}x^{13} + 12c_{12}x^{14} +$$
$$+ 13c_{13}x^{15} + 14c_{14}x^{16} + 15c_{15}x^{17} +$$
$$+ 16c_{16}x^{18}$$
$$3x^2y = 3c_2x^4 + 3c_3x^5 + 3c_4x^6 + 3c_5x^7 +$$
$$+ 3c_6x^8 + 3c_7x^9 + 3c_8x^{10} + 3c_9x^{11} +$$
$$+ 3c_{10}x^{12} + 3c_{11}x^{13} + 3c_{12}x^{14} + 3c_{13}x^{15} +$$
$$+ 3c_{14}x^{16} + 3c_{15}x^{17} + 3c_{16}x^{18}$$

Далее получаем:

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + x^4(2c_2 + 30c_6 +$$
$$+ 3c_2) + x^5(3c_3 + 42c_7 + 3c_3) + x^6(4c_4 +$$
$$+ 56c_8 + 3c_4) + x^7(4c_5 + 3c_5 + 72c_9) +$$
$$+ x^8(6c_6 + 3c_6 + 90c_{10}) + x^9(7c_7 + 3c_7 + 110c_{11}) +$$
$$+ x^{10}(8c_8 + 132c_{12} + 3c_8) + x^{11}(9c_9 + 156c_{13} +$$
$$+ 3c_9) + x^{12}(10c_{10} + 3c_{10} + 182c_{14}) +$$
$$+ x^{13}(11c_{11} + 210c_{15} + 3c_{11}) + x^{14}(12c_{12} + 240c_{16} +$$
$$+ 3c_{12}) + \ldots$$

Найдем c_n:

$2c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$

$c_3 = 0$

$c_4 = 0$

$c_5 = 0$

$30c_6 = -2{,}5 \Rightarrow c_6 = -\frac{1}{12}$

$c_7 = 0$

$c_8 = 0$

$c_9 = 0$

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 90c_{10} = 0 \Rightarrow 90c_{10} = 0{,}75 \Rightarrow c_{10} = \frac{1}{120}$

$c_{11} = 0$

$c_{12} = 0$

$c_{13} = 0$

$\frac{1}{12} + \frac{1}{40} + 182c_{14} = 0 \Rightarrow 182c_{14} = -\frac{13}{120} \Rightarrow c_{14} = -$

$c_{15} = 0$

$c_{16} = 0$

$y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{12} + \frac{x^{10}}{120} - \frac{x^{14}}{1680} \ldots$

$$\cancel{y(0,5) = \frac{1}{8} - \frac{1}{192} + \frac{1}{30720} - \frac{1}{6881280}} =$$

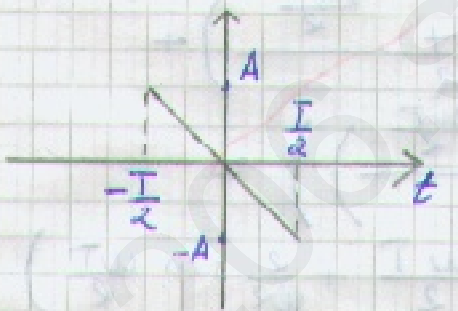
$$\cancel{= 0,13023264}$$

$$y(0,5) = \frac{1}{8} - \frac{1}{768} + \frac{1}{122880} - \frac{1}{275251 20} =$$

$$= 0,12370 60 184$$

Задание №10 а)

Найти преобразование Фурье (спектральную плотность $S(\omega)$) следующих функций (сигналов):



$$f(t) = Kt$$

$$f\left(-\frac{T}{2}\right) = A = -\frac{KT}{2} \Rightarrow K = -\frac{2A}{T}$$

$$f(t) = -\frac{2A}{T}t$$

$$S(w) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} -\frac{2A}{T} t e^{-jwt}\, dt = -\frac{2A}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t e^{-jwt}\, dt =$$

$$= -\frac{2A}{T}\left[\begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = e^{-jwt}dt & v = -\frac{1}{jw} e^{-jwt}\end{matrix}\right] =$$

$$= -\frac{2A}{T}\left(-\frac{t e^{-jwt}}{jw}\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{jw}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-jwt}\, dt\right) =$$

$$= -\frac{2A}{T}\left(-\frac{T e^{-\frac{jwT}{2}}}{2jw} - \frac{T e^{\frac{jwT}{2}}}{2jw} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{w^2}\left(e^{-\frac{jwT}{2}} - e^{\frac{jwT}{2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{2A}{T}\left(\frac{T}{jw}\left(\frac{e^{\frac{jwT}{2}} + e^{-\frac{jwT}{2}}}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{w^2}\left(\frac{e^{\frac{jwT}{2}} - e^{-\frac{jwT}{2}}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2Aj}{T}\left(-\frac{T}{w}\cos\frac{wT}{2} + \frac{2}{w^2}\sin\frac{wT}{2}\right)$$

$$|S(w)| = \frac{2A}{T}\left(-\frac{T}{w}\cos\frac{wT}{2} + \frac{2}{w^2}\sin\frac{wT}{2}\right)$$

Задание 2. Исследовать знакочеред. ряд на абсолют. и услов. сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$$

1) Исследуем на абсолют. сход:

сравниваем с рядом $a_n = \frac{1}{n+1}$ – он расходится

$$\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$$

По ~~до~~предельному признаку видно, что если $\frac{1}{n+1}$ – расход, то и $\frac{1}{\ln(n+1)}$ – расход.

2) Проверяем на услов. сходимость:

1. Ряд знакочередующийся
2. $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{\ln(n+2)}$ т.е. условие $|a_n| > |a_{n+1}|$ выполняется
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

т.е. ряд лейбницевского типа и значит ряд – условно сходится.

Задание 5

Используя признак Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость функционального ряда на указанном промежутке:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}\cos(nx)}{\sqrt[3]{n^5+1}} \qquad [0;2]$$

$$U_n(x) = \frac{\sqrt{x+1}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}} \le \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{n^5+1}} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{n^5+1}} < \frac{\sqrt{3}}{n^{\frac{5}{3}}}$$ — мажоранта, т.е. исходный ряд сходится равномерно на $[0;2]$

Задание 3

Найти интервал сход. степ. ряда. Исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} (x-1)^n$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n}}{3^n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}}}{\frac{\cancel{(n+1)}}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{\cancel{(n+1)}}} = \lim \frac{3^{n+1}}{3^n} =$$

$$= 3$$

$-3 < x-1 < 3$

$-2 < x < 4$

а) $x=-2$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} (-3)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} (-1)^n (3)^n =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n} (-1)^n$ – исследуем на

абсолют сход.:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = 1$ – не вып. необход приз.

расход., т.е ряд расходится.

Проверяем на усл сход:

1) ряд знакочеред. +

2) $n \operatorname{arctg} \frac{1}{n} > (n+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{(n+1)}$ –

приз. не выполняется т.к.

$n \operatorname{arctg} \frac{1}{n} < (n+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{(n+1)}$

Т.е ряд абсолютно расходится

б) $x=4$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} (3)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = 1$ – то ряд расходится

т.е. ряд сходится на $(-2; 4)$.

Задача 4.

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$. Указать область сходимости полученного ряда. Найти $f^{(k)}(x_0)$, если $k = 100 + N$ – вариант.

б)

$$f(x) = \frac{2x}{(x+3)(x+1)} \qquad x_0 = 0$$

$$\frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+1)} = A(x+1) + B(x+3) =$$

$$= Ax + A + Bx + 3B = x(A+B) + (A+3B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(A+B) + (A+3B) = 2x$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 - B \\ 2 - B + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 - B \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{3}{(x+3)} - \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{\left(\frac{x}{3} + 1\right)} - \frac{1}{(x+1)} =$$

$$= \left(1 - \left(\frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \ldots + (-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n\right)$$

$$- \left(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n \ldots\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \ldots\right) + \left(-1 + x - x^2\right.$$

$$\left. + x^3 - \ldots\right) = x^0(1-1) + x\left(-\frac{1}{3}+1\right) + x^2\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)$$

$$+ x^3\left(-\frac{1}{3^3}+1\right) + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left((-1)^n \frac{1}{3^n} + (-1)^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n (-1)^n \left(\frac{1}{3^n} + 1\right)$$

$$f^{(n)}(x_0) = a_n n!$$

$$f^{108}(0) = (-1)^{108}\left(\frac{1}{3^{108}} + 1\right) 108! =$$

$$= \left(\frac{1}{3^{108}} + 1\right) 108!$$

Найдем обл. сход пол. ряда:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{3}\right)^n$

$$R = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n+1}}} = \frac{3^n \cdot 3}{3^n} = 3$$