Задание №3.

Найти общее решения уравнения $y'' + ay' + by = f(x)$ используя характерестич. уравнение и метод вариации произвол. постоянных:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+x^2)} \; ; \; a = 2 \; ; \; b = 1.$$

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{(1+x^2)}$$

1) $\lambda^2 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow$

$\lambda = -1$ кр. 2!

$\varphi_1 = e^{-x} \quad \varphi_2 = x e^{-x}$

$y_{о.одн} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ (+)

2) $y(x) = c_1(x) e^{-x} + c_2(x) x e^{-x}$

$$\begin{cases} c_1' e^{-x} + c_2' x e^{-x} = 0 \\ -c_1' e^{-x} + c_2'(e^{-x} - x e^{-x}) = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1' e^{-x} + c_2' x e^{-x} = 0 \\ -c_1' e^{-x} + c_2' e^{-x} - c_2' x e^{-x} = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2} \end{cases}$$

$$\cancel{c_1' e^{-x}} + \cancel{c_2' x e^{-x}} - \cancel{c_1' e^{-x}} + c_2' e^{-x} - \cancel{c_2' x e^{-x}} =$$

$$= \frac{e^{-x}}{1+x^2} \Rightarrow c_2' e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_2' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow c_2 = \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} x + d_2$$

$$c_1' e^{-x} + 2 c_2' x e^{-x} + c_2' e^{-x} - c_2' x e^{-x} =$$

$$= \frac{e^{-x}}{1+x^2}$$

$$c_1' e^{-x} + c_2' x e^{-x} + c_2' e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$$

$$c_1' + c_2' x + c_2' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$c_1' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$c_1' = \frac{1 - x - 1}{1+x^2} \Rightarrow c_1' = -\frac{x}{1+x^2}$$

$$c_1 = -\int \frac{x\,dx}{1+x^2} \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2} \ln|x^2+1| + d_1$$

$y(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)e^{-x} + d_1 e^{-x} + xe^{-x}\operatorname{arctg} x +$

$+ xe^{-x} d_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = e^{-x} d_1 + xe^{-x} d_2 - \frac{e^{-x}}{2}\ln(x^2+1) +$
$+ xe^{-x}\operatorname{arctg} x$

Задание 4: Решить мет неопредел. коэ.!

б) $y'' - 4y = \cos x$

$\lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 = 4$

$\lambda_{1,2} = \pm 2$

$y_{о.о.} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$

$y_{част} = A\cos(x) + B\sin(x) = A\cos x + B\sin x$

$y' = -A\sin(x) + B\cos(x)$

$y'' = -A\cos(x) - B\sin(x)$

$-A\cos(x) - B\sin(x) - 4(A\cos(x) + B\sin(x)) =$
$= \cos(x)$

$$-A\cos(x) - B\sin(x) - 4A\cos x + 4B\sin(x) =$$
$$= \cos x$$

$$\cos(x)(-A-4A) + \sin(x)(4B-B) = \cos x$$

$$\begin{matrix} -A-4A=1 \\ 4B-B=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -5A=1 \\ B=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A=-\frac{1}{5} \\ B=0 \end{matrix}$$

$$y_{част} = -\frac{1}{5}\cos(x)$$

$$y_{он} = -\frac{1}{5}\cos(x) + C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$$

1) $y(0)=0$

$$0 = -\frac{1}{5} + C_1 + C_2$$

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{5}$$

2) $y'(0)=0$

$$y' = \frac{1}{5}\sin x - 2C_1e^{-2x} + 2C_2e^{2x}$$

$$0 = -2C_1 + 2C_2$$

$$C_1 = C_2$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{5} \\ C_1 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_2 = \frac{1}{5} \\ C_1 = C_2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} C_2 = \frac{1}{10} \\ C_1 = \frac{1}{10} \end{matrix}$$

+

$$y = -\frac{1}{5}\cos(x) + + \frac{e^{-2x}}{10} + \frac{e^{2x}}{10}$$?

Задание 6. $L(y) = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$

1) $L(y) = 0$ $y_1 = x^2$ - реш. одн. Зная это найти общее решение уравнения:

$x^2y'' - 2y = 0$

$y = x^2 z$

$y' = 2xz + x^2 z'$

$y'' = 2(z + xz') + 2xz' + x^2 z'' =$

$= 2z + 4xz' + x^2 z''$

$x^2(2z + 4xz' + x^2 z'') - 2x^2 z = 0$

$4x^3 z' + x^4 z'' = 0$

$z' = p \qquad z'' = p'$

$4x^3 p + x^4 p' = 0$

$x^4 p' = -4x^3 p$

$$x p' = -4p$$

$$x\frac{dp}{dx} = -4p$$

$$\frac{dp}{4p} = -\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{4}\ln|p| = -\ln|x c_1|$$

$$p^{\frac{1}{4}} = (x c_1)^{-1}$$

$$p = \frac{1}{(x c_1)^4}$$

$$p = z' \Rightarrow z' = \frac{1}{(x c_1)^4}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{(x c_1)^4} \Rightarrow z = -\frac{x^{-3}}{3c_1^4} + \frac{c_2}{c_1^4}$$

$$z = -\frac{1}{3x^3 c_1^4} + \frac{c_2}{(c_1)^4}$$

$$z = \frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{y}{x^2} = -\frac{1}{3x^3 c_1^4} + \frac{c_2}{(c_1)^4}$$

$$y_{oo} = -\frac{1}{3x(c_1)^4} + \frac{x^2 c_2}{(c_1)^4} = -\frac{c_1}{3x} + x^2 c_2$$

$\frac{\ }{2}+\frac{\ }{2}-\frac{\ }{3x}+2$

Задание №5 б) (переделанное)

Найти общее решение неоднородного уравнения $l(y)=f(x)$

$f(x)=2x^3-x$

$x^2y''-2y=2x^3+x$

$y_{oo}=-\frac{C_1}{3x}+x^2C_2$

$y_ч=Ax^3+\cancel{Bx^2}+Cx+F$ не будет

$y'=3Ax^2+2Bx+C$

$y''=6Ax+2B$

$x^2(6Ax+2B)-2(Ax^3-Bx^3-Bx^2+Cx$
$+F)=6Ax^3+2Bx^2-2Ax^3+2Bx^2-$
$-2Cx-2F=4Ax^3+4Bx^2-2Cx-2F$

$4Ax^3-4Bx^2-2Cx-2F=2x^3-x$

$$\begin{cases}4A=2; & -2F=0\\ 4B=0; & -2C=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=\frac{1}{2}; & F=0\\ B=0; & C=\frac{1}{2}\end{cases}$$

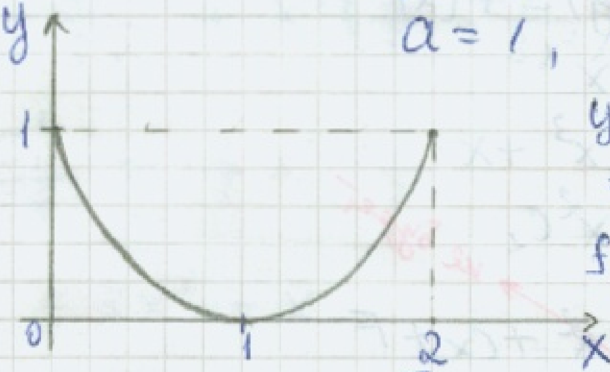
$$y_2 = \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2}$$ (+)

$$y = y_2 + y_{00} = \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2} - \frac{c_1}{3x} + x^2 c_2$$

Задание №1.

Найти изображение периодического оригинала с периодом $T = 2a$.

$a = 1$, $b = 1$, $T = 2$;



$$y = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$f(t) = t^2 - 2t + 1$$

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt$$

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-2p}} \int_0^2 e^{-pt} (t^2 - 2t + 1)\,dt =$$

Не надо разбивать на 3 интеграла

$$= \frac{1}{1 - e^{-2p}} \Big(\underbrace{\int_0^2 e^{-pt} t^2\,dt}_{1\ \text{интег.}} - \underbrace{2\int_0^2 t\, e^{-pt}\,dt}_{2\ \text{интег.}} + \underbrace{\int_0^2 e^{-pt}\,dt}_{3\ \text{интеграл}} \Big)$$

1 интеграл:

$$\int_0^2 e^{-pt} t^2 dt = \begin{bmatrix} u = t^2 & du = 2t\,dt \\ dv = e^{-pt}dt & v = \frac{e^{-pt}}{-p} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{t^2 e^{-pt}}{p}\Big|_0^2 + \frac{2}{p}\int_0^2 e^{-pt} t\, dt =$$

$$= -\frac{4e^{-2p}}{p} + \frac{2}{p}\begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^{-pt}dt & v = \frac{e^{-pt}}{-p} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{4e^{-2p}}{p} + \frac{2}{p}\left(-\frac{te^{-pt}}{p}\Big|_0^2 + \frac{1}{p}\int_0^2 e^{-pt}dt\right) =$$

$$= -\frac{4e^{-2p}}{p} + \frac{2}{p}\left(-\frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p}\left(\frac{e^{-pt}}{-p}\right)\Big|_0^2\right) =$$

$$= -\frac{4e^{-2p}}{p} + \frac{2}{p}\left(-\frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p}\left(-\frac{e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p}\right)\right) =$$

$$= -\frac{4e^{-2p}}{p} - \frac{4e^{-2p}}{p^2} - \frac{2e^{-2p}}{p^3} + \frac{2}{p^3}$$

2 интеграл:

$$2\int_0^2 t e^{-pt} dt = 2\begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^{-pt}dt & v = \frac{e^{-pt}}{-p} \end{bmatrix} =$$

$$= 2\left(-\frac{te^{-pt}}{p}\Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{e^{-pt}}{p}dt\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p}\left(\frac{e^{-pt}}{-p}\right)\Big|_0^2\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p}\left(\frac{e^{-2p}}{-p} + \frac{1}{p}\right)\right) =$$

$$= -\frac{4e^{-2p}}{p} - \frac{2e^{-2p}}{p^2} + \frac{2}{p^2}$$

3 интеграл:

$$\int_0^2 e^{-pt}\,dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^2 = -\frac{e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p}$$

Получаем:

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-2p}}\left(-\cancel{\frac{4e^{-2p}}{p}} - \frac{4e^{-2p}}{p^2} -\right.$$

$$- \frac{2e^{-2p}}{p^3} + \frac{2}{p^3} + \cancel{\frac{4e^{-2p}}{p}} + \frac{2e^{-2p}}{p^2} - \frac{2}{p^2}$$

$$\left. - \frac{e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{(1-e^{-2p})p}\left(-\frac{2e^{-2p}}{p} -\right.$$

$$\left. - \frac{2e^{-2p}}{p^2} + \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p} - e^{-2p} + 1\right)$$

Задание 2.

Операторным методом найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = xe^x \\ y(0) = 1; \; y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) \doteqdot Y(p)$$

$$y'(x) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$$

$$y''(x) \doteqdot p^2 Y(p) - [y'(0) + py(0)] =$$
$$= p^2 Y(p) - 1 - p$$

$$xe^x \doteqdot \frac{1}{(p-1)^2}$$

Получаем:

$$p^2 Y(p) - p - 1 - 4(pY(p) - 1) + 5Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$p^2 Y(p) - p - 1 - 4pY(p) + 4 + 5Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$p^2 Y(p) - 4pY(p) + 5Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2} - 3 + p$$

$$Y(p) = \frac{p^3 - 5p^2 + 7p - 2}{(p-1)^2(p^2 - 4p + 5)} =$$

$$= \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{Cp+D}{p^2-4p+5}$$

$A(p-1)(p^2-4p+5) + B(p^2-4p+5) +$
$+ (Cp+D)(p^2-2p+1) =$
$= A(p^3 - 4p^2 + 5p - p^2 + 4p - 5) +$
$+ Bp^2 - 4Bp + 5B + Cp^3 - 2Cp^2 +$
$+ Cp + Dp^2 - D2p + D =$
$= Ap^3 - 4Ap^2 + A5p - Ap^2 + A4p - A5 +$
$+ Bp^2 - B4p + 5B + Cp^3 - 2Cp^2 + Cp + Dp^2 -$
$- D2p + D =$
$= Ap^3 - A5p^2 + A9p - A5 + Bp^2 - B4p$
$+ 5B + Cp^3 - 2Cp^2 + Cp + Dp^2 -$
$- D2p + D = p^3 - 5p^2 + 7p - 2$

Тогда:

$p^3(A+C) + p^2(-A5 + B - 2C + D)$
$+ p(A9 - B4 - D2 + C) + (-A5 + 5B +$
$= p^3 - 5p^2 + 7p - 2$

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ -A5 + B - 2C + D = -5 \\ A9 - B4 - D2 + C = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left. -A5+5B+D=-2 \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=1-A \\ -A5+B-2+2A+D=-5 \\ A9-B4-D2+1-A=7 \\ -A5+5B+D=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=1-A \\ -3A+B+D=-3 \\ 4A-2B-D=3 \\ -5A+5B+D=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=1-A \\ D=-3-B+3A \\ 4A-2B+3+B-3A=3 \\ -5A+5B-3-B+3A=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=1-A \\ D=-3-B+3A \\ A-B=0 \\ -2A+4B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=1-A \\ D=-3-B+3B \\ A=B \\ -2B+4B=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=\frac{1}{2}; \quad B=\frac{1}{2}; \\ D=-2; \\ A=\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$y(p) = \frac{\frac{1}{2}}{p-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(p-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}p-2}{p^2-4p+5} =$$

$$= \cancel{\frac{1p-1}{2(p-1)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-1)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{p-4}{(p^2-4p+5)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)^2} +$$

$$+ \frac{p-4}{(p-2)^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-1)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{p-2-2}{(p-2)^2+1}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)^2}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-2)^2+1} - \frac{1}{(p-2)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^{2x}\cos x -$$

$$- e^{2x}\sin x$$

Проверка:

1) $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x$

$$y' = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}\big(2e^{2x}\cos x$$

$$- e^{2x}\sin x\big) - \big(2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x\big) =$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ y'(0) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \text{выпол.}$$

2) $y_{част} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x$

$y' = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x$ +

$y'' = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x$

Получаем:

$$\frac{3e^x}{2} + \frac{1}{2}xe^x - 4\left(e^x + \frac{1}{2}xe^x\right) + 5\left(\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x\right) = \frac{3e^x}{2} + \frac{xe^x}{2} - \frac{8e^x}{2} - \frac{4}{2}xe^x + \frac{5e^x}{2} + \frac{5xe^x}{2} =$$

$$= \frac{2xe^x}{2} = xe^x$$ — выполняется.

Задание 4а) Решить задачу Коши с помощью формулы Дюамеля, решив предварительно вспомогательную задачу Коши.

$$\begin{cases} y'' - 4y = \cos x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'' - 4z = 1 \\ z(0) = 0 \quad z'(0) = 0 \end{cases}$$

$z'' - 4z = 1$

$\lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 = 4 \qquad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2$

$y_{oo} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$y_{част} = -\frac{1}{4}$

$z(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}$

Ищем c_1 и c_2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{1}{4} = 0 \\ 2c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 + c_2 - \frac{1}{4} = 0 \\ c_1 = c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_2 = \frac{1}{4} \\ c_1 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{1}{8} \\ c_1 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$z(x) = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{8} e^{-2x} - \frac{1}{4}$

$$z'(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

$$y(x) = \int_0^x \frac{1}{4}\left(e^{2(x-t)} - e^{-2(x+t)}\right)\cos t\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_0^x e^{2(x-t)}\cos t\,dt - \int_0^x e^{-2(x-t)}\cos t\,dt\right)$$

1) $\int_0^x e^{2(x-t)}\cos t\,dt =$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{2(x-t)} & du = -2e^{2(x-t)}dt \\ dv = \cos t\,dt & v = \sin t \end{bmatrix} =$$

$$= \left(e^{2(x-t)}\sin t\right)\Big|_0^x + 2\int_0^x e^{2(x-t)}\sin t\,dt =$$

$$= \sin x + 2\begin{bmatrix} u = e^{2(x-t)} & du = -2e^{2(x-t)}dt \\ dv = \sin t\,dt & v = -\cos t \end{bmatrix} =$$

$$= \sin x + 2\left(-\left(e^{2(x-t)}\cos t\right)\Big|_0^x - 2\int_0^x e^{2(x-t)}\cos t\,dt\right) =$$

$$= \sin x - 2\cos x + 2e^{2x} - 4\int_0^x e^{2(x-t)}\cos t\,dt =$$

$$= \frac{\sin x}{5} - \frac{2\cos x}{5} + \frac{2e^{2x}}{5}$$

2) $\int_0^x e^{-2(x-t)}\cos t\,dt = \begin{bmatrix} u = e^{-2(x-t)} & du = 2e^{-2(x-t)}dt \\ dv = \cos t\,dt & v = \sin t \end{bmatrix}$

$$= \left(e^{-2(x-t)}\sin t\right)\Big|_0^x - 2\int_0^x e^{-2(x-t)}\sin t\,dt =$$

$$= \sin x - 2\begin{bmatrix} u = e^{-2(x-t)} & du = 2e^{-2(x-t)}dt \\ dv = \sin t\,dt & v = -\cos t \end{bmatrix}$$

$$= \sin x - 2\left(\left(e^{-2(x-t)}(-\cos t)\right)\Big|_0^x + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^x e^{-2(x-t)} \cos t\,dt\right) = \sin t - 2\left((-\cos\right.$$

$$\left. + e^{-2x} + 2\int_0^x e^{-2(x-t)} \cos t\,dt\right) =$$

$$= \sin x + 2\cos x - 2e^{-2x} +$$

$$+ 4\int_0^x e^{-2(x-t)} \cos t\,dt = \frac{\sin x}{5} + \frac{2\cos x}{5} -$$

$$- \frac{2e^{-2x}}{5}$$

$+$

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{\sin x}{5}} - \frac{2\cos x}{5} + \frac{2e^{2x}}{5} -\right.$$

$$\left. - \cancel{\frac{\sin x}{5}} - \frac{2\cos x}{5} + \frac{2e^{-2x}}{5}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}e^{2x} + \frac{1}{10}e^{-2x}$$

Задание № 6

б)

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = -2x + 2y \\ x(0) = 1 \quad y(0) = -1 \end{cases}$$

+

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-(A - pE)^{-1} = -\begin{pmatrix} (2-p) & (-2) \\ (-2) & (2-p) \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\Delta = (2-p)(2-p) - (-2)(-2) =$$

$$= 4 - 2p - 2p + p^2 - 4 = p^2 - 4p$$

$$= -\frac{1}{p^2-4p}\begin{pmatrix} (2-p) & 2 \\ 2 & (2-p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{(2-p)}{p^2-4p}\right) & \left(-\frac{2}{p^2-4p}\right) \\ \left(-\frac{2}{p^2-4p}\right) & \left(-\frac{(2-p)}{p^2-4p}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{p-2}{p^2-4p}\right) & \left(-\frac{2}{p^2-4p}\right) \\ \left(-\frac{2}{p^2-4p}\right) & \left(\frac{p-2}{p^2-4p}\right) \end{pmatrix}$$

1) $\frac{p-2}{p(p-4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-4} = A(p-4) + Bp =$

$= Ap - A4 + Bp = p(A+B) - A4$

$p(A+B) - A4 = p-2$

$\begin{cases} A+B=1 \\ -A4=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}+B=1 \\ A=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p-4)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot e^{4t}$.

2) $-\frac{2}{p(p-4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-4)} = A(p-4) + Bp$

$A(p-4) + Bp = -2 \Rightarrow Ap - A4 + Bp = -2$

$p(A+B) - A4 = -2$

$\begin{cases} A+B=0 \\ -A4=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ A=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p-4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{4t}$

Потом:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{4t}\right) & \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{4t}\right) \\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{4t}\right) & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{4t}\right) \end{pmatrix} = e^{At}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{4t}\right) & \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{4t}\right) \\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{4t}\right) & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{4t}\right) \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot e^{4t}-\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot e^{4t}\right) \\ \left(\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot e^{4t}-\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}e^{4t}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ -e^{4t} \end{pmatrix}$$

Задание 6.

а) решить систему уравнений сведением к уравнению второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = -2x + 2y \\ x(0) = 1; \ y(0) = -1 \end{cases}$$

6
а б в
+ + 0

12.12.07

$\dot{x} = 2x - 2y$

$\dot{x} - 2x = -2y$

$2x - \dot{x} = 2y$

$y = x - \frac{\dot{x}}{2}$

$\dot{y} = \dot{x} - \frac{\ddot{x}}{2}$

Получаем:

$\dot{x} - \frac{\ddot{x}}{2} = -2x + 2\left(x - \frac{\dot{x}}{2}\right) \Rightarrow \dot{x} - \frac{\ddot{x}}{2} = -2x + 2x - \dot{x} =$

$\Rightarrow 2\dot{x} - \frac{\ddot{x}}{2} = 0 \Rightarrow 4\dot{x} - \ddot{x} = 0$

$4\dot{x} - \ddot{x} = 0$

$4\lambda - \lambda^2 = 0$

$\lambda(4 - \lambda) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 4$

$x = c_1 + c_2 e^{4t}$

$\dot{x} = 4c_2 e^{4t}$

т.к.: $x(0) = 1$

$c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2$

$y = c_1 + c_2 e^{4t} - \frac{4c_2 e^{4t}}{2} = \frac{2(c_1 + c_2 e^{4t}) - 4c_2 e^{4t}}{2} =$

$= c_1 + c_2 e^{4t} - 2c_2 e^{4t} = c_1 - c_2 e^{4t}$

$y(0) = -1$

$c_1 - c_2 = -1$ подстав в $c_1 = 1 - c_2$

$1 - c_2 - c_2 = -1$

$-2c_2 = -2$

$\begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^{4t} \\ y = -e^{4t} \end{cases}$

б) решить систему уравнений операт. методом:

$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = -2x + 2y \\ x(0) = 1 \quad y(0) = -1 \end{cases}$

$x(t) \risingdotseq X(p) \qquad y(t) \risingdotseq Y(p)$

$\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - 1 \qquad \dot{y}(t) \risingdotseq pY(p) + 1$

$$pX(p) - 1 = 2X(p) - 2Y(p)$$

$$Y(p) + 1 = -2X(p) + 2Y(p)$$

1) $pX(p) - 1 = 2X(p) - 2Y(p)$

$pX(p) - 2X(p) = -2Y(p) + 1$

$X(p)(p-2) = -2Y(p) + 1$

$X(p) = \dfrac{-2Y(p) + 1}{(p-2)}$

2) $pY(p) + 1 = -2X(p) + 2Y(p)$

$pY(p) + 1 = -2\left(\dfrac{-2Y(p)+1}{p-2}\right) + 2Y(p)$

$pY(p) + 1 = \dfrac{4Y(p) - 2 + 2pY(p) - 4Y(p)}{p-2}$

$(p-2)(pY(p) + 1) = -2 + 2pY(p)$

$p^2Y(p) + p - 2pY(p) - \cancel{2} = -\cancel{2} + 2pY(p)$

$p^2Y(p) - 4pY(p) + p = 0$

$Y(p)(p^2 - 4p) = -p$

$Y(p) = -\dfrac{p}{p(p-4)} = -\dfrac{1}{p-4} \risingdotseq \underline{\underline{-e^{4t}}}$

$X(p) = \dfrac{-2\left(-\dfrac{1}{p-4}\right) + 1}{p-2} = \dfrac{2 + p - 4}{(p-4)(p-2)} =$

$$= \frac{p-2}{(p-4)(p-2)} = \frac{1}{p-4} \doteqdot e^{4t}$$

$$\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = -e^{4t} \end{cases}$$