5

$$L(y) = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$$

1) Проверить, что $y_1(x)$ есть частное решение однородного ур-я $L(y)=0$. Зная это, найти общее решение ур-я $L(y)=0$. 2) Найти общее решение неоднородного ур-я $L(y)=f(x)$ с заданной правой частью $f(x)$, предположив, что одно из частных решений ур-я $L(y)=f(x)$ является многочленом.

$$a(x) = x^2; \quad b(x) = -4x, \quad c(x) = 6;$$

$$y_1(x) = x^2; \quad f(x) = 2x^4$$

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^4; \quad y_1(x) = x^2$$

1° Проверим, что $y_1(x) = x^2$ – частн. реш. однор. ур. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 2x; \\ y_1'' &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2\cdot 2 - 4x\cdot 2x + 6x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x^2 - 4x^2 = 0 \text{ – верно.}$$

2° Ищем общее решение однородного ур-я в виде $y_0 = z(x)y_1 = x^2 z$.

Подставим в ур-е:

$$y_0' = 2xz + x^2z';$$

$$y_0'' = 2z + 2xz' + x^2z'' = 2z + 4xz' + x^2z'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(2z + 4xz' + x^2z'') - 4x(2xz + x^2z') + 6x^2z = 0$$

~~вольдхлопоенил~~

$\Rightarrow 2x^2z + 4x^3z' + x^4z'' - 8x^2z - 4x^3z' + 6x^2z =$

$= 0 \Rightarrow x^4z'' = 0 \Rightarrow z'' = 0$; $z' = C_1$

$\Rightarrow z = C_1x + C_2$

$y_0 = x^2z = x^2(C_1x + C_2) = C_1x^3 + C_2x^2$.

$y_0 = C_1x^3 + C_2x^2$ – общ. решение однор. ур-я.

2° Найдём частное решение ур-я

$x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4$ в виде:

– не будет – вх. в $y_{одн}(x)$

$\tilde{y} = ax^4 + \underbrace{bx^3 + cx^2} + dx + e$.

$\tilde{y}' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$;

$\tilde{y}'' = 12ax^2 + 6bx + 2c$;

$x^2(12ax^2 + 6bx + 2c) - 4x(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d) +$

$+ 6(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = 2x^4$.

$x^4(12a - 16a + 6a) + x^3(6b - 12b + 6a) +$

$+ x^2(2c - 8c + 6b) + x(-4d + 6c) + 6e = 2x^4$

$2ax^4 + 2dx + 6e = 2x^4$

$2a = 2$; $d = e = 0$;

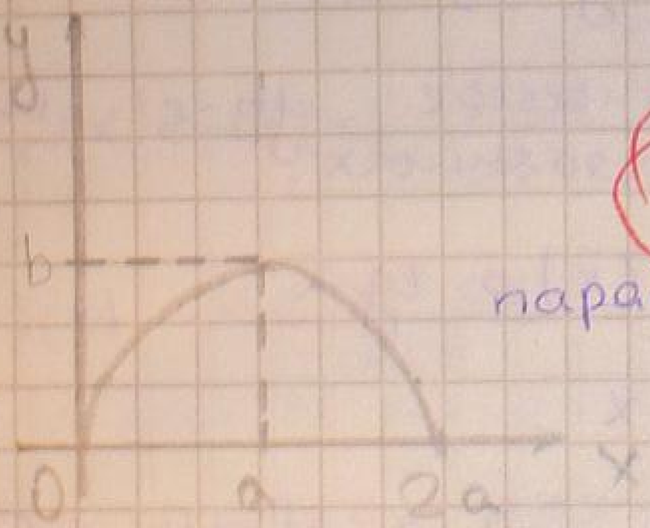
$a = 1$; $d = e = 0$; b, c – любые

$\Rightarrow \tilde{y} = x^4$ – частн. реш.

Ответ: $y(x) = y_0 + \tilde{y} = \underbrace{C_1x^3 + C_2x^2}_{\text{общ. реш.}} + \underbrace{x^4}_{\text{частн.}}$

1

Найти изображение периодического оригинала с периодом $T = 2a$.



парабола

$a = 1$; $b = 2$; $T = 2$.

$$f(x) = -2(x-1)^2 + 2 = -2x^2 + 4x$$

$$F(f(x)) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx = \frac{1}{1-e^{-2p}}\int_0^2(-2x^2+4x)e^{-px}dx =$$

$$= -\frac{1}{p(1-e^{-2p})}\int_0^2(-2x^2+4x)\,de^{-px} =$$

$$= -\frac{1}{p(1-e^{-2p})}\left((-2x^2+4x)e^{-px}\Big|_0^2 - \int_0^2(-4x+4)e^{-px}dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{p(1-e^{-2p})}\left(0 + \frac{1}{p}\left((-4x+4)e^{-px}\Big|_0^2 + 4\int_0^2 e^{-px}dx\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{p^2(1-e^{-2p})}\left(-4e^{-2p} - 4 - \frac{4}{p}e^{-px}\Big|_0^2\right) =$$

$$= \frac{4}{p^2(1-e^{-2p})}\left(1 + e^{-2p} + \frac{e^{-2p}-1}{p}\right) = \frac{4}{p^2}\cdot\frac{1+e^{-2p}}{1-e^{-2p}} - \frac{4}{p^3}$$

Ответ: $F(p) \doteqdot f(x) = \frac{4}{p^2}\cdot\frac{1+e^{-2p}}{1-e^{-2p}} - \frac{4}{p^3}$

③

Найти общее решение ур-я

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

используя характеристическое ур-е и метод вариации постоянных:

$$a=0\ ;\ b=1\ ;\ f(x)=\operatorname{tg} x$$

$$y''+y=\operatorname{tg} x$$

а) Решаем однородное ур-е $y''+y=0$.

Составим характеристич. ур-е $\lambda^2+1=0$
$\lambda=\pm i$

$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$ — общ. реш.

б) Частное решение неоднородного ур-я ищем методом вариации произвольных постоянных:

$$\tilde{y} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

C_1 и C_2 найдём из системы:

$$\begin{array}{l} \cdot\cos x \\ \downarrow + \\ (-\sin x) \end{array}\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}\begin{array}{l} \cdot\sin x \\ +\downarrow \\ \cos x \end{array} \Rightarrow$$

$C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ $\qquad$ $C_2' = \sin x$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\cancel{C_2'(x)}\frac{\sin^2 x}{\cos x} \\ -C_2'(x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \\ C_2' = \sin x \end{cases}$$ — проходили на упр.

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x} \\ C_2'(x)\cdot\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x\right) = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x} \\ C_2'(x)\cdot\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$$

?

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x} \\ C_2'(x) = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} \\ C_2'(x) = \sin x \end{cases}$$

+

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = -\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + d_1$$

$$C_2(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + d_2$$

$$\tilde{y}(x) = \cos x\left(-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x\right) - \cos x\cdot\sin x = -\cos x\left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x\right) - \cos x\cdot\sin x = -\cos x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \cos x\cdot\sin x - \cos x\cdot\sin x = -\cos x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin 2x$$

— част. реш.

Ответ: $y(x) = y_0 + \tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x -$
$- \cos x \cdot \ln \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin 2x.$

4б

Решить задачу Коши

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

(решив предварительно ~~за~~ вспомогательную задачу Коши

+

$$z'' + az' + bz = 1, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 0;)$$

методом неопределённых коэффициентов (подбором частного решения неоднородного уравнения по правой части.)

$a = -3, \quad b = 2; \quad f(x) = e^x$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

1°. Решим вспомогательную задачу (операторным методом) (3 член?)

$$z'' - 3z' + 2z = 1, \quad z(0) = 0; \quad z'(0) = 0.$$

$L(z(x)) = F(p); \quad L(z'(x)) = pF(p);$

$L(z''(x)) = p^2 F(p); \quad L(1) = 1/p \Rightarrow p^2 F(p) - 3pF(p) +$

$+ 2F(p) = 1/p$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$F(p)(p^2 - 3p + 2) = 1/p;$

$\lambda = 1, 2$

$z_{част} = 1/2$

$\Rightarrow z = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 1/2$

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2-3p+2)} = \frac{1}{p(p-2)(p-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-1}$$

$$\frac{1}{p(p^2-3p+2)} = \frac{A(p-2)(p-1) + Bp(p-1) + Cp(p-2)}{p(p^2-3p+2)}$$

$$1 = A(p-2)(p-1) + Bp(p-1) + Cp(p-2)$$

$p = 0$: $1 = 2A$ $\quad A = 1/2$

$p = 2$: $1 = B \cdot 2 \cdot 1$ $\quad B = 1/2$

$p = 1$: $1 = C(-1)$ $\quad C = -1$

$$F(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1} = L\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x} - e^x\right) = L(z(x))$$

$$z(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x} - e^x$$

2°. $y(x) = z'(x) * f(x)$

$z'(x)\ e^{2x} - e^x$;

$f(x) = e^x$.

$$y(x) = (e^{2x} - e^x) \cdot e^x = \int_0^x (e^{2t} - e^t)\, e^{x-t}\, dt =$$

$$= \int_0^x \left(e^{2t+x-t} - e^{t+x-t}\right) dt = \int_0^x \left(e^{t+x} - e^x\right) dt =$$

$$= e^x e^t\Big|_0^x - e^x \cdot t\Big|_0^x = e^x(e^x - 1) - e^x \cdot x = e^{2x} - e^x - xe^x$$

Ответ: $y(x) = e^{2x} - e^x - xe^x$

2

Операторным методом найти решение задачи Коши

$$y'' + 2ay' + (a^2 + b^2)y = (Ax + B)e^{\gamma x}$$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'$$

$$A = 0;\ B = 1;\ y_0 = 1;\ y_0' = 0,$$
$$a = 2;\ b = 1;\ \gamma = -1$$

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-x}$$

Перейдём к изображениям:

A

$$L(y(x)) = F(p);\ L(y'(x)) = pF(p) - 1;$$

$$L(y''(x)) = p^2F(p) - p$$

$$L(e^{-x}) = 1/(p+1)$$

$$p^2F(p) - p + 4pF(p) - 4 + 5F(p) = \frac{1}{p+1}$$

$$F(p)(p^2 + 4p + 5) = \frac{1}{p+1} + p + 4$$

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+4p+5)} + \frac{p+4}{p^2+4p+5}$$

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+4p+5)} = \frac{1}{(p+1)((p+2)^2+1^2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{Bp+C}{(p+2)^2+1^2}$$

$$1 = A((p+2)^2 + 1^2) + (Bp + C)(p+1)$$

$p = -1 \quad 1 = A(1+1) \qquad A = 1/2;\ B = -A = -1/2$

$p^2: \quad 0 = A + B$

$p^0: \quad 1 = 5A + C \qquad C = 1 - 5A = 1 - 5/2 = -3/2$

$$F(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p+3}{(p+2)^2+1^2} + \frac{p+4}{(p+2)^2+1^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p+5}{(p+2)^2+1^2}$$

Найдем оригиналы для $F(p)$

$$F(p) \risingdotseq L(y(x)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(p+2)+3}{(p+2)^2+1^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(p+2)}{(p+2)^2+1^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\cos x + \frac{3}{2}e^{-2x}\sin x$$

Ответ: $\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\cos x + \frac{3}{2}e^{-2x}\sin x$.

(+)

4а

Решить задачу Коши

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

с помощью формулы Дюамеля, решив предварительно вспомогательную задачу Коши:

$$z'' + az' + bz = 1, \quad z(0) = 0, \; z'(0) = 0.$$

$$a = -3; \quad b = 2; \quad f(x) = e^x.$$

1° Решение вспомогательной задачи в пункте 4б типового расчёта.

$$z = (x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x} - e^x$$

$2^\circ \quad y(x) = z'(x) \cdot f(x)$

$z'(x) = e^{-x} - e^{-2x}; \quad f(x) = \frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y(x) = \left(\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(e^{-x} - e^{-2x}\right) =$

$= \int_0^x \left(\frac{1}{e^t+1} - \frac{1}{2}\right)\left(e^{-x+t} - e^{-2x+2t}\right) dt =$

$= e^{-x}\int_0^x \left(\frac{1}{e^t+1} - \frac{1}{2}\right) e^t \, dt - e^{-2x}\int_0^x \left(\frac{1}{e^t+1} - \frac{1}{2}\right) e^{2t} \, dt =$

$= e^{-x}\int_0^x \left(\frac{1}{e^t+1} - \frac{1}{2}\right) de^t - e^{-2x}\int_0^x \left(\frac{1}{e^t+1} - \frac{1}{2}\right) e^t \, de^t =$

$= \left| \begin{array}{l} u = e^t \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = x \Rightarrow u = e^x \end{array} \right| = e^{-x}\int_1^{e^x} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{2}\right) du -$

$- e^{-2x}\int_1^{e^x} \left(\frac{u}{u+1} - \frac{u}{2}\right) du = e^{-x}\left(\ln|u+1| - \frac{u}{2}\right)\Big|_1^{e^x} -$

$- e^{-2x}\int_1^{e^x} \left(\frac{(u+1)-1}{u+1} - \frac{u}{2}\right) du =$

$= e^{-x}\left(\ln|e^x+1| - \frac{e^x}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\right) - e^{-2x}\int_1^{e^x} \Big(1 -$

$- \frac{1}{u+1} - \frac{u}{2}\Big) du = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2} + e^{-x}\left(\ln|e^x+1| - \ln 2\right) -$

$- e^{-2x}\left(\ln|u+1| - \frac{u}{2}\right)\Big|_1^{e^x} = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - 1\right) +$

$+ e^{-x}\left(\ln|e^x+1| - \ln 2\right) - e^{-2x}\Big(e^x - \ln|e^x+1| -$

$- \frac{1}{4}e^{2x} - 1 + \ln 2 + \frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - 1\right) + e^{-x}\Big(\ln|e^x +$

$+ 1| - \ln 2\Big) - e^{-x} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-2x} + e^{-2x}\left(\ln|e^x+1| - \ln 2\right)$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{4}e^{-2x} + (\ln|e^x+1| - \ln 2)(e^{-x} + e^{-2x})$$

Ответ: $y(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{4}e^{-2x} + (\ln|e^x+1| - \ln 2)(e^{-x} + e^{-2x})$

6

Решить систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ тремя методами.

а) Сведение к уравнению второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \qquad x(0) = 1; \; y(0) = 1.$$

$x = \dot{y} - y$;

$\dot{x} = \ddot{y} - \dot{y}$;

$\ddot{y} - \dot{y} = \dot{y} - y + 4y$

$\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2}$;

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = -1$

$$y_0 = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 e^{3t}$$

$$x_0 = \dot{y}_0 - y_0 = -c_1 \cdot e^{-t} + 3C_2 e^{3t} - C_1 e^{-t} - C_2 e^{3t} =$$

$$= -2C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{3t}$$

$$\begin{cases} x(0) = 1 = c_1 + c_2 \\ y(0) = -2C_1 + 2C_2 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{1}{4};$$

$$c_2 = \frac{3}{4};$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} e^{3t} \\ y = +\frac{1}{4} e^{-t} + \frac{3}{4} e^{3t} \end{cases}$$ +

б) Операторным методом +

$$x(t) \risingdotseq X(p)$$

$$\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - X(0)$$

$$\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - 1$$

$$y(t) \risingdotseq Y(p)$$

$$\dot{y}(t) \risingdotseq pX(p) - 1$$

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = X(p) + 4Y(p) \\ pY(p) - 1 = X(p) + Y(p) \end{cases}$$

$$pX(p) - 4pY(p) + 3 = -3X(p)$$

$$4pY(p) = 3X(p) + pX(p) + 3$$

$$Y(p) = \frac{pX(p) + 3X(p) + 3}{4p}$$

$$pX(p) - 1 = X(p) + \frac{pX(p) + 3X(p) + 3}{p}$$

$$pX(p) - 1 = \frac{X(p) + pX(p) + 3X(p) + 3}{1}$$

$$p^2X(p) - p = pX(p) + 3X(p) + 3$$

$$X(p)(p^2 - p - 3) = 3 + p$$

$$X(p) = \frac{3+p}{p^2-p-3} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-3}$$

$$p + 3 = A(p-3) + B(p+1)$$

$$p = 3; \quad 6 = 4B; \quad B = \frac{3}{2}$$

$$p = -1; \quad 2 = 4A; \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$X(p) = \frac{3+p}{p^2-p-3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{p+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{p-3}$$

$$\begin{cases} x(p) \risingdotseq -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t} = x(t) \\ y(p) = p\left(\frac{3+p}{(p+1)(p-3)}\right) + 3\left(\frac{3+p}{(p+1)(p-3)}\right) + 3 \risingdotseq \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t} \\ y(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} \end{cases}$$

в) операторный метод с нахождением матричной экспоненты e^{At}

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \qquad x(0) = 1;\ y(0) = 1$$

$L(e^{At}) = -(A - pE)^{-1}$ - изобр. матр. экспон.

$$|A - pE| = \begin{vmatrix} 1-p & 4 \\ 1 & 1-p \end{vmatrix};$$

$$\det(A - pE) = (1-p)(1-p) - 4 = p^2 - 2p - 3 =$$

$$= (p+1)(p-3) \Rightarrow (A - pE)^{-1} = \frac{1}{(p+1)(p-3)}\begin{pmatrix} 1-p & -4 \\ -1 & 1-p \end{pmatrix}$$

$$L(e^{At}) = -(A - pE)^{-1} = \frac{1}{(p+1)(p-3)}\begin{pmatrix} p-1 & 4 \\ 1 & p-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{p-1}{(p+1)(p-3)} & \frac{4}{(p+1)(p-3)} \\ \frac{1}{(p+1)(p-3)} & \frac{p-1}{(p+1)(p-3)} \end{pmatrix}$$

$$\frac{p-1}{(p+1)(p+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3} = L\left(\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t}\right);$$

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1} = L\left(\frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}\cdot e^{-t}\right);$$

$$\frac{4}{(p+1)(p-3)} = \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p+1} = L\left(e^{3t} - e^{-t}\right)$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} & e^{3t} - e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} & e^{3t} - e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} + e^{3t} - e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t} \\ \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t} \\ y(t) = \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t} \end{cases}$$

– решение систем