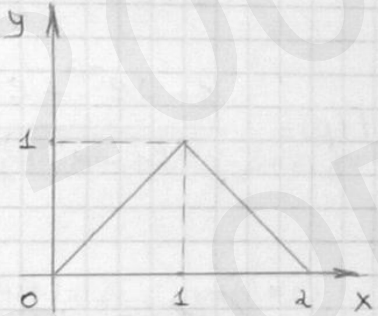
① Найти изображение периодического оригинала с периодом $T = 2a$.

Вид графика на одном периоде.

$T = 2$



Используя функцию Хэвисайда, запишем функцию для оригинала на одном периоде аналитическим выражением.

$$y = x\cdot 1(x) - x\cdot 1(x-1) + (2-x)\cdot 1(x-1) - (2-x)\cdot 1(x-2) =$$

$$= x\cdot 1(x) + 1(x-1)\cdot(2-x-x) + (x-2)\cdot 1(x-2)$$

$$y = x\cdot 1(x) - 2(x-1)\cdot 1(x-1) + (x-2)\cdot 1(x-2)$$

Найдем изображение $F_0(p)$

$$y \doteqdot F_0(p) = \frac{1}{p^2} - 2\cdot\frac{1}{p^2}\cdot e^{-p} + \frac{1}{p^2}\cdot e^{-2p} =$$

$$= \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$$

Т.к. функция периодическая, $T=2$, то

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-2p}}$$

$$F(p)=\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2(1-e^{-2p})}$$

Ответ: $F(p)=\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2(1-e^{-2p})}$.

② Операторным методом найти решение задачи Коши

$$y''+2\alpha y'+(\alpha^2+\beta^2)y=(Ax+B)\cdot e^{\gamma x}$$

$$y(0)=y_0\ ,\ y'(0)=y'_0$$

$A=0\ ,\ B=1\ ,\ y_0=1\ ,\ y'_0=0\ ,\ \alpha=2\ ,\ \beta=2\ ,\ \gamma=-3$

$$y''+4y'+8y=e^{-3x}\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=0$$

Составим операторное уравнение:

$$e^{-3x}\doteqdot\frac{1}{p+3}\ ,\quad y\doteqdot Y(p)$$

$$y'\doteqdot p\cdot Y(p)-y(0)=p\,Y(p)-1$$

$$y''\doteqdot p^2\cdot Y(p)-p\cdot y(0)-y'(0)=p^2\cdot Y(p)-p$$

$$p^2\cdot Y(p)-p+4p\,Y(p)-4+8\,Y(p)=\frac{1}{p+3}$$

$$Y(p)(p^2+4p+8)=\frac{1}{p+3}+p+4=\frac{p^2+7p+13}{p+3}$$

$$Y(p)=\frac{p^2+7p+13}{(p+3)(p^2+4p+8)}$$

Разложим дробь на простые дроби

$$\frac{p^2+7p+13}{(p+3)(p^2+4p+8)} = \frac{p^2+4p+8+3p+5}{(p+3)(p^2+4p+8)} = \frac{1}{p+3} + \frac{3p+5}{(p+3)(p^2+4p+8)}$$

$$\frac{3p+5}{(p+3)(p^2+4p+8)} = \frac{A}{p+3} + \frac{Bp+C}{p^2+4p+8}$$

$$3p+5 = Ap^2+4Ap+8A+Bp^2+3Bp+pC+3C$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3=4A+3B+C \\ 5=8A+3C \end{cases} \Rightarrow \quad A=-\frac{4}{5} \quad B=\frac{4}{5} \quad C=\frac{19}{5}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p+3} - \frac{4}{5(p+3)} + \frac{\frac{4}{5}p+\frac{19}{5}}{p^2+4p+8}$$

$$\frac{1}{5}\,\frac{4p+19}{p^2+4p+8} = \frac{1}{5}\,\frac{4p+19}{(p+2)^2+2^2} = \frac{4}{5}\,\frac{p+\frac{19}{4}}{(p+2)^2+2^2} =$$

$$= \frac{4}{5}\,\frac{(p+2)+\frac{11}{4}}{(p+2)^2+2^2} = \frac{4}{5}\left(\frac{p+2}{(p+2)^2+2^2} + \frac{11}{8}\cdot\frac{2}{(p+2)^2+2^2}\right)$$

$$Y(p) = \frac{1}{p+3} - \frac{4}{5(p+3)} + \frac{4}{5}\left(\frac{p+2}{(p+2)^2+2^2} + \frac{11}{8}\,\frac{2}{(p+2)^2+2^2}\right)$$

$$Y(p) \doteqdot y(x) = \frac{1}{5}e^{-3x} + \frac{4}{5}e^{-2x}\left(\frac{4}{5}\cos 2x + \frac{11}{10}\sin 2x\right)$$

Ответ

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{-3x} + \frac{4}{5}e^{-2x}\cdot\left(\frac{4}{5}\cos 2x + \frac{11}{10}\sin 2x\right)$$

③ Найти общее решение ДУ $y''+ay'+by=f(x)$, используя характеристическое уравнение и метод вариации произвольных постоянных.

$$a=0,\quad b=-4,\quad f(x)=\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$$y''-4y=\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-4=0,\quad \lambda_{1,2}=\pm 2$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_0(x)=C_1\cdot e^{-2x}\cdot C_2\cdot e^{2x}$$

$$\begin{cases} C_1'\cdot e^{-2x}+C_2'\cdot e^{2x}=0 \\ -2C_1'\cdot e^{-2x}+2C_2'\cdot e^{2x}=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1} \end{cases}$$

$$C_2'\cdot e^{2x}=-C_1'\cdot e^{-2x}$$

$$-2C_1'\cdot e^{-2x}-2C_1'\cdot e^{-2x}=-4C_1'\cdot e^{-2x}=\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$$C_1'=-\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$$

$$C_2'=-C_1'\cdot e^{-4x}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{e^{2x}+1},\quad C_2'=\frac{1}{4}\,\frac{1}{e^{2x}+1}$$

$$C_1=-\frac{1}{4}\int\frac{e^{4x}\,dx}{e^{2x}+1}=\left[\begin{array}{l} e^{2x}=t \\ dt=2t\,dx \end{array}\right]=$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{t^{\cancel{2}}}{(t+1)\cdot\cancel{t}}\,dt=-\frac{1}{8}\int\frac{t+1-1}{t+1}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{8}\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=-\frac{1}{8}t+\frac{1}{8}\ln(t+1)=$$

$$=-\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{8}\ln(e^{2x}+1)$$

$$C_2=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{e^{2x}+1}=\left[\begin{array}{l} e^{2x}=t \\ dt=2t\cdot dx \end{array}\right]=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t(t+1)}=$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=-\frac{1}{8}\ln(t+1)+\frac{1}{8}\ln t=$$

$$=-\frac{1}{8}\ln(e^{2x}+1)+\frac{1}{8}\ln e^{2x}=-\frac{1}{8}\ln(e^{2x}+1)+\frac{x}{4}$$

Ответ:

$$y(x)=C_1\cdot e^{-2x}+C_2\cdot e^{2x}+e^{-2x}\left(-\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{8}\ln(e^{2x}+1)\right)+$$

$$+e^{2x}\left(-\frac{1}{8}\ln(e^{2x}+1)+\frac{x}{4}\right)$$

④ Решить задачу Коши

$y''+ay'+by=f(x)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

$a=-1$, $b=0$, $f(x)=e^{2x}$

а) С помощью формулы Дюамеля, решив предварительно вспомогательную задачу Коши:

$$z''+az'+bz=1,\quad z(0)=0,\quad z'(0)=0$$

$$y''-y'=e^{2x},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

$$z''-z'=1,\quad z(0)=0,\quad z'(0)=0$$

$$1 \doteqdot \frac{1}{p},\quad z \doteqdot Z(p),$$

$$z' \doteqdot pZ(p),\quad z''=p^2Z(p) \quad (\text{т.к } z(0)=0 \text{ и } z'(0)=0)$$

$$p^2Z(p)-pZ(p)=\frac{1}{p},$$

$$Z(p)(p^2-p)=\frac{1}{p},\quad Z(p)=\frac{1}{p^2(p-1)}$$

Разложим дробь на простые дроби

$$\frac{1}{p^2(p-1)}=\frac{Ap+B}{p^2}+\frac{C}{p-1}$$

$$1=Ap^2-Ap+Bp-B+Cp^2$$

$$B=-1,\quad A=-1,\quad C=1$$

$$\frac{1}{p^2(p-1)}=-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p-1}=Z(p)$$

Найдем оригинал $z(x)$

$$Z(p) \doteqdot z(x)=e^x-x-1$$

$$z'(x)=e^x-1$$

По формуле Дюамеля:

$$y(x)=\int_0^x z'(x-\tau)\cdot f(\tau)\,d\tau$$

$$y(x)=\int_0^x (e^{x-\tau}-1)\cdot e^{2\tau}\,d\tau=\int_0^x (e^x\cdot e^\tau-e^{2\tau})\,d\tau=$$

$$=e^x\cdot e^\tau\Big|_0^x-\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_0^x=$$

$$=\left(e^x e^x-\frac{1}{2}e^{2x}\right)-\left(e^x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}$$

Ответ: $y(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}$

б) методом неопределённых коэффициентов (подбором частного решения неоднородного уравнения по правой части).

$$y''-y'=e^{2x}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

Характеристическое уравнение:

$\alpha^2-\alpha=0$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_0=C_1\cdot e^x+C_2\cdot e^{0x}=C_1\cdot e^x+C_2$$

Т.к. $f(x)=e^{2x}$, то частное решение ищем в виде: $y_ч=A\cdot e^{2x}$

$y_ч=A\cdot e^{2x}$

$y_ч'=2Ae^{2x}$

$y_ч''=4Ae^{2x}$

Подставим $y_ч$ в исходное уравнение

$4Ae^{2x}-2Ae^{2x}=e^{2x}$

$4A-2A=1$, $A=\frac{1}{2}$

$y_ч=\frac{1}{2}e^{2x}$

$y=y_0+y_ч=C_1\cdot e^x+C_2+\frac{1}{2}e^{2x}$

$y'=C_1\cdot e^x+e^{2x}$

Используем начальные условия:

$y(0)=0$, $0=C_1+C_2+\frac{1}{2}$

$y'(0)=0$, $0=C_1+1$

$C_1=-1$, $C_2=\frac{1}{2}$

$y=-e^x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2x}$

Ответ: $y=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}$

⑤ $L(y) = a(x)\cdot y'' + b(x)\cdot y' + c(x)\cdot y$

1) Проверить, что $y_1(x)$ есть частное решение однородного уравнения $L(y)=0$. Зная это, найти общее решение уравнения $L(y)=0$

$a(x) = x$, $b(x) = 2$, $c(x) = -x$

$$y_1(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$L(y) = x\cdot y'' + 2y' - x\cdot y$$

Проверим частное решение:

$$L\left(\frac{e^x}{x}\right) = e^x - 2\frac{e^x}{x} + 2\frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x} - \frac{2e^x}{x^2} - e^x = 0$$

$$y' = \frac{e^x x - e^x}{x^2}, \quad y'' = \frac{e^x\cdot x - e^x}{x^2} - \frac{e^x\cdot x^2 - 2xe^x}{x^4}$$

Ищем y_2 в виде $y_2 = y_1\cdot u(x) = \frac{e^x}{x}\cdot u(x)$

$$y_2' = \left(\frac{e^x}{x}\right)' u(x) + u'(x)\frac{e^x}{x} = \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}\right)u(x) + u'(x)\cdot\frac{e^x}{x}$$

$$y_2'' = \left(\frac{e^x}{x} - 2\frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^3}\right)\cdot u(x) + u'(x)\left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}\right) + \frac{u''(x)e^x}{x} + u'(x)\left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}\right)$$

Подставим в $L(y)$

$$L(y_2) = e^x\left[\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)u(x) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\cdot u'(x) + u''(x) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)u'(x) + 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\cdot u(x) + u'(x)\cdot\frac{2}{x} - u(x)\right] =$$

$$= e^x\left[\cancel{u(x)} - \cancel{\frac{2}{x}u(x)} + \cancel{\frac{2}{x^2}u(x)} + 2u'(x) - \cancel{\frac{2}{x}u'(x)} + u''(x) + \cancel{\frac{2}{x}u(x)} - \cancel{\frac{2}{x^2}u(x)} + \cancel{\frac{2}{x}u'(x)} - \cancel{u(x)}\right] = e^x\cdot\left(u''(x) + 2u'(x)\right)$$

$$e^x\left(u''(x) + 2u'(x)\right) = 0, \quad u''(x) + 2u'(x) = 0$$

Замена: $z' = u$, $z' + 2z = 0$

$$\frac{dz}{dx} = -2z, \quad \int\frac{dz}{z} = -2\int dx$$

$$\ln z = -2x, \quad z = e^{-2x}, \quad u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$y_2(x) = \frac{e^x}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) = -\frac{e^{-x}}{2x}$$

$$y_0(x) = C_1\cdot y_1(x) + C_2\cdot y_2(x) = C_1\cdot\frac{e^x}{x} - \frac{C_2}{2}\cdot\frac{e^{-x}}{x}$$

Ответ: $y_0(x) = C_1\cdot\frac{e^x}{x} + C_2\cdot\frac{e^{-x}}{x}$

г) Найти общее решение неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$ с заданной правой частью $f(x)$, предположим, что одно из частных решений уравнения $L(y) = f(x)$ является многочленом

$$L(y) = xy'' + 2y' - xy = f(x), \quad f(x) = x^3 + 2x$$

$$xy'' + 2y' - xy = x^3 + 2x$$

Ищем частное решение в виде:

$$y_ч = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y_ч' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y_ч'' = 6ax + 2b$$

Подставим частное решение $y_ч$ в $L(y)$

$$x(6ax+2b) + 2(3ax^2 + 2bx + c) - x(ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3 + 2x$$

$$6ax^2 + 2bx + 4bx + 2c - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx = x^3 + 2x$$

$$-ax^4 - bx^3 + x^2(12a - c) + x(6b - d) + 2c = x^3 + 2c$$

$$a = 0, \quad b = -1, \quad c = 0, \quad d = -8$$

$y_ч = -x^2 - 8$; $y = y_0 + y_ч$ – общее решение

Ответ: $y = C_1 \cdot \dfrac{e^x}{x} + C_2 \cdot \dfrac{e^{-x}}{x} - x^2 - 8$

6) Решить систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$,

$a = 3$, $b = -2$, $c = 5$, $d = -3$

$x_0 = 1$, $y_0 = -2$

а) сведением к уравнению 2-го порядка

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y & x(0) = 1 \\ y' = 5x - 3y & y(0) = -2 \end{cases}$$

$$y = \frac{3x - x'}{2}$$

$$\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}x'' = 5x - \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}x'$$

$$x'' + 10x - 9x = 0$$

$x'' + x = 0$, характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i$

$$x(t) = C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x'$$

$$y(t) = \frac{3}{2}c_1 \cos t + \frac{3}{2}c_2 \sin t + \frac{1}{2}c_1 \sin t - \frac{1}{2}c_2 \cos t$$

Используем начальные условия:

$x(0) = 1$, $1 = c_1$

$y(0) = -2$, $-2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}c_2$, $c_2 = 7$

$$x = \cos t + 7 \sin t$$

$$y = \frac{3}{2}\cos t - \frac{7}{2}\cos t + \frac{21}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin t =$$

$$= -2\cos t + 11 \sin t$$

Ответ: $x(t) = \cos t + 7 \sin t$

$y(t) = -2\cos t + 11 \sin t$

б) операторным методом

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y & x(0) = 1 \\ y' = 5x - 3y & y(0) = -2 \end{cases}$$

$$x \doteqdot x(p)$$

$$y \doteqdot y(p)$$

$$\begin{cases} p \cdot x(p) - 1 = 3x(p) - 2y(p) \\ p\, y(p) + 2 = 5x(p) - 3y(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(p)(p-3) = -2y(p) + 1 \\ y(p)(p+3) = 5x(p) - 2 \end{cases}$$

$$x(p) = \frac{-2y(p)+1}{p-3}, \quad y(p) = \frac{5x(p)-2}{p+3}$$

$$x(p) = \frac{1 - 2\frac{5x(p)-2}{p+3}}{p-3} = \frac{p+3-10x(p)+4}{p^2-9}$$

$$x(p)(p^2-9) = p - 10x(p) + 7$$

$$x(p)(p^2-9+10) = p+7$$

$$x(p)(p^2+1) = p+7, \quad x(p) = \frac{p+7}{p^2+1}$$

$$x(p)=\frac{p}{p^2+1}+7\frac{1}{p^2+1}$$

Найдем оригинал $x(t)$

$$x(t)\risingdotseq x(p)$$

$$x(t)=\cos t+7\sin t$$

$$y(p)=\frac{5\cdot\frac{-2y(p)+1}{p-3}-2}{p+3}=\frac{-10y(p)-5-2p+6}{p^2-9}$$

$$y(p)(p^2-9)=-10y(p)-2p+11$$

$$y(p)(p^2+1)=-2p+11$$

$$y(p)=\frac{-2p+11}{p^2+1}=-2\frac{p}{p^2+1}+11\frac{1}{p^2+1}$$

Найдем оригинал $y(t)$

$$y(t)\risingdotseq y(p)$$

$$y(t)=-2\cos t+11\sin t$$

Ответ: $x(t)=\cos t+7\sin t$

$y(t)=-2\cos t+11\sin t$

в) С помощью матричной экспоненты

$$\begin{cases} x'=3x-2y & x(0)=1\\ y'=5x-3y & y(0)=-2\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x(p)\\y(p)\end{pmatrix}=(pE-A)^{-1}\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}p&0\\0&p\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}3&-2\\5&-3\end{pmatrix}$$

$$(pE-A)^{-1}=\begin{pmatrix}p-3&2\\-5&p+3\end{pmatrix}=\frac{1}{p^2+1}\begin{pmatrix}p+3&-2\\5&p-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x(p)\\y(p)\end{pmatrix}=\frac{1}{p^2+1}\begin{pmatrix}p+3&-2\\5&p-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{p^2+1}\begin{pmatrix}p+7\\11-2p\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x(p)\\y(p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{p+7}{p^2+1}\\\frac{-2p+11}{p^2+1}\end{pmatrix}$$

Найдем оригинал $x(t)$ и $y(t)$

$$x(p)=\frac{p+7}{p^2+1}\risingdotseq\cos t+7\sin t=x(t)$$

$$y(p)=\frac{11-2p}{p^2+1}\risingdotseq-2\cos t+11\sin t=y(t)$$

Ответ: $x(t)=\cos t+7\sin t$

$y(t)=-2\cos t+11\sin t$