ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ «АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ». (1 СЕМЕСТР)

1. Матрицы и определители.

1.1*. Вычислить определитель Вандермонда $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$

1.2*. Вычислить определитель 7-го порядка, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = \min(i, j)$.

1.3*. Вычислить определитель 6-го порядка, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = \max(i, j)$.

1.4*. Как изменится произведение AB матриц A и B, если

(1) переставить i-ю и j-ю строки матрицы A

(2) к i-ой строке матрицы A прибавить j-ю строку, умноженную на число α

(3) переставить i-й и j-й столбцы матрицы B

(4) к i-му столбцу матрицы B прибавить j-й столбец, умноженный на число α

2. Системы линейных уравнений.

2.1*. Выяснить, образуют ли строки каждой из матриц

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & 50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -30 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

3. Векторы.

3.1*. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$. При каком соотношении между α и β векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны.

3.2*. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$. Пусть α и β таковы, что векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ неколлинеарны. Полагая $\overrightarrow{BC} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{MN} = \vec{q}$, выразить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

3.3*. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}$, и $\vec{c}$. Доказать, что векторы $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, $3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $-\vec{a}+5\vec{b}-3\vec{c}$ компланарны.

3.4*. Задан тетраэдр $OABC$. В базисе из ребер $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ найти координаты вектора $\overrightarrow{DE}$, где D и E – середины ребер $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

3.5*. Задан тетраэдр $OABC$. В базисе из ребер $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ найти координаты вектора $\overrightarrow{OF}$, где F – точка пересечения медиан основания ABC.

3.6*. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM} = \beta\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF} = \gamma\overrightarrow{CA}$. Пусть P, Q, и R– точки пересечения прямых BF и CK, CK и AM, AM и BF, соответственно. В базисе из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ найти координаты векторов $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ}$ и $\overrightarrow{CR}$.

3.7*. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

3.8*. Доказать, что при любых векторах $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ векторы $\vec{a}\times\vec{p}$, $\vec{a}\times\vec{q}$, $\vec{a}\times\vec{r}$ компланарны.

3.9*. Для заданных векторов $\vec{a} = (2, 0, 3)$, $\vec{b} = (-3, 5, 4)$, $\vec{c} = (3, 4, -1)$ вычислить проекцию вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \vec{c}$.

4. Прямая и плоскость.

4.1*. Заданы точки $A(1, 2, 3)$, $B(2, -2, 1)$, $C(3, 0, 3)$ и $D(16, 10, 18)$. E – точка пересечения плоскости OAB (O - начало координат) с прямой, проведенной через точку D параллельно прямой OC. Найти координаты точки E.

4.2*. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, 4)$ и отстоящей от точки $A(0, 3)$ на расстояние $\rho = 1$.

4.3*. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1, 2)$ и удаленной от точки $A(-2, -5)$ вдвое дальше, чем от точки $B(1, 8)$.

4.4*. Проверить пересекает ли прямая $2x + y + 3 = 0$ отрезок M_1M_2, где $M_1(-5, 1)$ и $M_2(3, 7)$.

4.5*. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 1, -1)$ и перпендикулярной к плоскостям $2x - y + 5z + 3$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.

4.6*. Пусть заданы две прямые:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \ \text{ и } \ L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Доказать, что прямые лежат в одной плоскости в том и только в том случае, если выполнено условие

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

4.7*. Доказать, что расстояние между скрещивающимися прямыми $L_1 : \ \vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{q}_1 t$ и $L_2 : \ \vec{r}(t) = \vec{r}_2 + \vec{q}_2 t$ может быть вычислено по формуле.

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\vec{q}_1\vec{q}_2|}{|[\vec{q}_1, \vec{q}_2]|}$$

5. Кривые и поверхности второго порядка.

5.1*. Эллипс, главные оси которого совпадают с координатными осями, проходит через точки $M_1(2, \sqrt{3})$ и $M_2(0, 2)$. Написать его уравнение, найти фокальные радиусы точки M_1 и расстояния от этой точки до директрис.

5.2*. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти точку, растояние от которой до фокуса F_2 в четыре раза больше расстояния до фокуса F_1 ($x_{F_1} < x_{F_2}$).

5.3*. Написать уравнение кривой, по которой движется точка M, если расстояние от нее до точки $F(3, 0)$ остается в два раза меньше расстояния до прямой $x+y-1 = 0$.

5.4*. Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 20$, перпендикулярных прямой $2x - 2y - 13 = 0$.

5.5*. На эллипсе $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $2x - 3y + 25 = 0$ и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой.

5.6*. Убедившись, что точка $M\left(-5, \dfrac{9}{4}\right)$ лежит на гиперболе $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, найти фокальные радиусы этой точки и ее расстояния до директрис.

5.7*. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, параллельных прямой $10x-3y+9=0$.

5.8*. На гиперболе $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $3x+2y+1=0$ и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой.

5.9*. Написать уравнения касательной к параболе $x^2=16y$, перпендикулярной к прямой $2x+4y+7=0$.

5.10*. На параболе $y^2=64x$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $4x+3y-14=0$ и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой.

5.11*. Доказать, что поверхность $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$ и плоскость $2x-2y-z-10=0$ имеют одну общую точку, найти ее координаты.

5.12*. Доказать, что плоскость $4x-5y-10z-20=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ по прямолинейным образующим. Составить уравнения этих образующих.